МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАННЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ»

Факультет Физико-математических и естественных наук

Кафедра Математический институт им. С.М.Никольского

Директор математического
института им.
С.М.Никольского
Муравник А.Б.
(Ф.И.О.)
«_____» ___________ 2022г.

Выпускная квалификационная работабакалавра

Направление «Прикладная математика и информатика»
(шифр направления/специальности) (наименование направления/специальности)

профиль/специализация «______________________________»

ТЕМА «Спектральные свойства дифференциально-разностных операторов на конечном интервале»

Выполнил студент Воротников Роман Юрьевич

Группа НПМбд-01-18

Студ. билет № 1032181488

Руководитель выпускной
квалификационной работы
Скубачевский А.Л.,
д.ф-м.н., профессор

____
(подпись)

Автор________________________
(подпись)

г. Москва
2022 г.

Аннотация

В данной статье рассматривается задача на собственные значения и собственные функции дифференциально-разностного оператора с краевыми условиями Дирихле на интервале (0,2). Изучается вопрос о гладкости решений этой задачи. Показывается, что в случае отрицательно-определенного оператора существует бесконечное множество собственных значений, отвечающих гладким решениям и бесконечное множество собственных значений, отвечающих решениям, гладкость которых нарушается внутри интервала.

Содержание

1 Введение

Теория дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом ведет свою историю с середины прошлого века.Интерес к таким задачам возник в связи с практическими приложениями, например, в задаче об успокоении системы управления с последействием [1].
Среди всех таких задач следует выделить задачи, в которых сдвиги присутствуют в старших членах уравнений. Такие задачи рассматривались, например, в работах [2], [3]. Было обнаружено, что, в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, гладкость решений дифференциально-разностных уравнений может нарушаться внутри интервала, что связано со сдвигами точек границы внутрь интервала.
Исследованию гладкости решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений посвящена работа [4], в которой были получены условия на правые части уравнения, обеспечивающие гладкость обобщенных решений первой краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений на всем интервале.
Большой вклад в систематизацию и развитие теории функционально - дифференциальных уравнений внесла монография [5].
В данной работе мы будем рассматривать следующее уравнение

$$(Ru')' = \lambda u, t \in [0, 2] \tag{1}$$

с однородными краевыми условиями

$$u(0) = u(2) = 0 \tag{2}$$

Нас будет интересовать вопрос о гладкости решений задачи (1)-(2). Стоит отметить, что подобная задача изучалась в работах [6],[7]. Был исследован вопрос о том, при каких условиях на коэффициенты уравнения краевая задача будет иметь классические решения для любых непрерывных правых частей при условии, что существует обобщенное решение рассматриваемой задачи. Однако метод, рассмотренный в данных работах, не подходит для исследования нашей задачи, т.к. в нашем случае правая часть имеет не произвольный вид, а связана с решением задачи.

2 Основные определения и понятия

Пусть $d = N + \Theta$, где $N \in N, 0 < \Theta \leq 1$.
Определение 1. Разностным оператором R будем называть оператор, заданный формулой

$$Ru(t) = \sum_{i=-N}^{N} \alpha_i u(t+i) \tag{3}$$

Введем операторы
$I_Q : L_2(0,d) \longrightarrow L_2(R), P_Q : L_2(R) \longrightarrow L_2(0,d), R_Q : L_2(0,d) \longrightarrow L_2(0,d)$
по формулам

$$(I_Q v)(t) = v(t), t \in (0,d), (I_Q v)(t) = 0, t \in R\ (0,d), \tag{4}$$

$$(P_Q v)(t) = v(t), t \in (0,d), \tag{5}$$

$$R_Q = P_Q R I_Q, \tag{6}$$

где $Q = (0,d)$.

Оператор I_Q позволяет учитывать однородные краевые условия. Умножение на оператор P_Q означает, что уравнение (1) рассматривается не на всей оси, а лишь для $t \in (0,d)$.

В нашей задаче $\Theta = 1$, обозначим $Q_{1l} = (l-1, l), l = 1, ..., N+1$.
Таким образом, мы получим класс непересекающихся интервалов. Очевидно, что любые два интервала могут быть получены друг из друга сдвигом на некоторое целое число.

Обозначим через $L_2(\cup_l Q_{1l})$ подпространство функций в $L_2(Q)$, равных нулю вне $\cup_l Q_{1l}$, а через $P_1 : L_2(Q) \longrightarrow L_2(\cup_l Q_{1l})$ – оператор ортогонального проектирования функций из $L_2(Q)$ на $L_2(\cup_l Q_{1l})$, $l = 1, ..., N$, где

$$L_2(\cup_l Q_{1l}) = \{u \in L_2(0,d) : u(t) = 0 \text{ при } t \in (0,d) \setminus \cup_l Q_{1l}\}.$$

Очевидно, что

$$L_2(Q) = \bigoplus L_2(\cup_l Q_{1l}) \tag{7}$$

Из определений разностных операторов и интервалов Q_{1l} вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. $L_2(\cup_l Q_{1l})$ - инвариантное подпространство оператора P_Q.

Введем изометрический изоморфизм гильбертовых пространств

$U_s : L_2(\cup_l Q_{1l}) \longrightarrow L_2^{N+1}(Q_{11})$ по следующему правилу:

$$(U_s u)_k(t) = u(t+k-1), t \in Q_{11}, k = 1, ..., N+1 \tag{8}$$

где $L_2^{N+1}(Q_{11}) = \prod\limits_{k=1}^{N+1} L_2(Q_{11})$.

Обозначим R_{11} матрицу порядка $(N+1)$ x $(N+1)$ с элементами, равными коэффициентам разностного оператора

$$R_{11} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_N \\ \alpha_{-1} & \alpha_0 & \dots & \alpha_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{-N} & \alpha_{-N+1} & \dots & \alpha_0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Лемма 2.Оператор $R_{Q1} : L_2^{N+1}(Q_{11}) \longrightarrow L_2^{N+1}(Q_{11})$, введенный по формуле

$$R_{Q1} = U_s R_Q U_s^{-1} \tag{10}$$

является оператором умножения на квадратную матрицу R_{11} порядка $(N+1)$ x $(N+1)$.

Доказательство этого факта можно найти, например, в [5].

Введем неограниченный оператор $A_R : D(A_R) \subset L_2(0,d) \longrightarrow L_2(0,d)$, заданный по формуле

$$A_R v = (R_Q u')', v \in D(A_R) \tag{11}$$

с областью определения $D(A_R) = \{v : v \in \dot{W}_2^1, R_Q v' \in W_2^1\}$.

Будем далее обозначать

$$u_k(t) = u(t+k-1), t \in [0,1], k = 1, ..., N+1 \tag{12}$$

Лемма 3. $u \in D(A_R)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} u_1(0) = 0 \\ u_{N+1}(1) = 0 \\ u_1(1) = u_2(0) \\ ... \\ u_N(1) = u_{N+1}(0) \\ (R \begin{bmatrix} u_1'(0) \\ ... \\ u_{N+1}'(0) \end{bmatrix})_{(l+1)} = (R \begin{bmatrix} u_1'(1) \\ ... \\ u_{N+1}'(1) \end{bmatrix})_{(l)} \end{cases} \tag{13}$$

Лемма 3 следует из простого свойства: функция v, определенная в областях Q_1 и Q_2 и такая, что $v \in H^1(Q_i)$ принадлежит классу $H^1(Q), Q = Q_1 \cup Q_2$

тогда и только тогда, когда совпадают следы функции при переходе через границу множеств. Это свойство переносится соответственно на саму функцию u и функцию Ru'.

Отметим еще несколько свойств оператора A_R.

Лемма 4. Оператор A_R самосопряженный тогда и только тогда, когда матрица R_{11} - эрмитова.

Лемма 5. Оператор A_R отрицательно-определенный тогда и только тогда, когда матрица R_{11} - положительно определена.

Как показано в работах [2]–[5], гладкость обобщенных решений краевой задачи (1), (2) может нарушаться. Однако, при условии невырожденности оператора R_Q (иными словами, $det R_{11} \neq 0$) гладкость обобщенных решений сохраняется внутри интервалов $Q_{1l}, l = 1, ..., N+1$.

Доказательство приведенным выше фактам можно найти в [5].

Перейдем теперь непосредственно к рассмотрению нашей задачи.

3 Постановка задачи

Пусть задан разностный оператор

$$Ru(t) = u(t) + \alpha u(t-1) + \beta u(t+1), t \in [0, 2] \tag{14}$$

Будем считать, что оператор R - невырожденный, если $\alpha\beta \neq 1$
Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} A_R u = \lambda u \\ u(0) = u(2) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

Требуется найти все решения данной задачи. Определить, какие из найденных решений принадлежат классу $H^2(0, 2)$, а гладкость каких решений нарушается ($u \in H^1(0, 1) \setminus H^2(0, 2)$).

4 Сведение задачи о гладкости собственных функций к исследованию трансцендентного уравнения

Перепишем задачу (15) в виде

$$u_1'' + \beta u_2'' = \lambda u_1 \tag{16}$$

$$\alpha u_1'' + u_2'' = \lambda u_2 \tag{17}$$

$$u_1(0) = 0 \tag{18}$$

$$u_2(1) = 0 \tag{19}$$

$$u_1(1) = u_2(0) \tag{20}$$

$$u_1'(1) + \beta u_2'(1) = u_2'(0) + \alpha u_1'(0) \tag{21}$$

Сначала выясним, является ли λ =0 собственным числом рассматриваемой задачи. В этом случае при условии $\alpha\beta \neq 1$, получим

$$u_1'' = 0 \tag{22}$$

$$u_2'' = 0 \tag{23}$$

Решение системы (22)-(23) запишется в виде

$$u_1 = C_1 t + C_2 \tag{24}$$

$$u_2 = C_3 t + C_4 \tag{25}$$

для которого мы имеем следующие условия:

$$u_1(0) = C_2 = 0 \tag{26}$$

$$u_2(1) = C_3 + C_4 = 0 \tag{27}$$

$$C_1 = C_4 \tag{28}$$

$$C_1 + \beta C_3 = C_3 + \alpha C_1 \tag{29}$$

Если $\alpha + \beta \neq 2$, получим, что $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ и $u = 0$, что противоречит определению собственной функции и λ =0 не является собственным числом рассматриваемой задачи. Если же $\alpha + \beta = 2$, тогда получим семейство решений

$$u_1 = Ct \tag{30}$$

$$u_2 = -Ct + C \tag{31}$$

Следует заметить, что найденное решение $u \notin H^2(0, 2)$, т.к. его производная терпит разрыв при переходе через границу подобластей: $u_1'(1) \neq u_2'(0)$.

Далее везде будем полагать, что $\lambda \neq 0$.
Для начала положим $\alpha = \beta$. В этом случае, складывая уравнения (16) и (17), а также вычитая уравнение (17) из (16), будем иметь

$$(1+\alpha)(u_1+u_2)'' = \lambda(u_1+u_2) \tag{32}$$

$$(1-\alpha)(u_1-u_2)'' = \lambda(u_1-u_2) \tag{33}$$

откуда

$$u_1+u_2 = C_1 e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}t} \tag{34}$$

$$u_1-u_2 = C_3^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}t} + C_4 e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}t} \tag{35}$$

Далее находим общий вид решения

$$u_1 = C_1 e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}t} + C_3 e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}t} + C_4 e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}t} \tag{36}$$

$$u_2 = C_1 e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}t} - C_3 e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}t} - C_4 e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}t} \tag{37}$$

Краевые условия примут вид

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0 \tag{38}$$

$$C_1 e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}} - C_3 e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}} - C_4 e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}} = 0 \tag{39}$$

$$C_1(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1) + C_2(e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1) + C_3(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1) + C_4(e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1) = 0 \tag{40}$$

$$C_1\sqrt{\lambda(1+\alpha)}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1) + C_2\sqrt{\lambda(1+\alpha)}(-e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}+1) + C_3\sqrt{\lambda(1-\alpha)}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+$$

$$+1) + C_4\sqrt{\lambda(1-\alpha)}(-e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}-1) = 0 \tag{41}$$

Перепишем условия (38)-(41) в ином виде. Для этого составим матрицу системы. Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}} & e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}} & -e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}} & -e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}} \\ e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1 & e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1 & e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1 & e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1 \\ \sqrt{\lambda(1+\alpha)}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1) & \sqrt{\lambda(1+\alpha)}(-e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}+1) & \sqrt{\lambda(1-\alpha)}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1) & \sqrt{\lambda(1-\alpha)}(-e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}-1) \end{pmatrix}$$

Вычитая из 2 строки первую, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1 & e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1 & -e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}-1 & -e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}-1 \\ e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1 & e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1 & e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1 & e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1 \\ \sqrt{\lambda(1+\alpha)}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1) & \sqrt{\lambda(1+\alpha)}(-e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}+1) & \sqrt{\lambda(1-\alpha)}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1) & \sqrt{\lambda(1-\alpha)}(-e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}-1) \end{pmatrix}$$

Далее складываем 2 и 3 строки

$$2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1 & e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1 & 0 & 0 \\ e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1 & e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1 & e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1 & e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1 \\ \sqrt{\lambda(1+\alpha)}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1) & \sqrt{\lambda(1+\alpha)}(-e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}+1) & \sqrt{\lambda(1-\alpha)}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1) & \sqrt{\lambda(1-\alpha)}(-e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}-1) \end{pmatrix}$$

Теперь вычтем из третьей строки вторую

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1 & e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1 & e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1 \\ \sqrt{\lambda(1+\alpha)}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1) & \sqrt{\lambda(1+\alpha)}(-e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}+1) & \sqrt{\lambda(1-\alpha)}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1) & \sqrt{\lambda(1-\alpha)}(-e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}-1) \end{pmatrix}$$

Из 4 строки вычтем 2ую, домноженную на $\sqrt{\lambda(1+\alpha)}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1 & e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1 & e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1 \\ 0 & 2\sqrt{\lambda(1+\alpha)}(-e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}+1) & \sqrt{\lambda(1-\alpha)}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1) & \sqrt{\lambda(1-\alpha)}(-e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}-1) \end{pmatrix}$$

К 4 строке теперь прибавим 3-ю строку, домноженную на $\sqrt{\lambda(1-\alpha)}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1 & e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1 & e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1 \\ 0 & \sqrt{\lambda(1+\alpha)}(-e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}+1) & \sqrt{\lambda(1-\alpha)}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1) & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, условия (38)-(41) сводятся к следующим:

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0 \tag{42}$$

$$C_1(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1) + C_2(e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1) = 0 \tag{43}$$

$$C_3(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1) + C_4(e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1) = 0 \tag{44}$$

$$C_2\sqrt{\lambda(1+\alpha)}(-e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}+1) + C_3\sqrt{\lambda(1-\alpha)}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1) = 0 \tag{45}$$

Для того, чтобы система (42)-(45) имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен 0. Разложим определитель по первой строке

$$\begin{vmatrix} e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1 & e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1 \\ \sqrt{\lambda(1+\alpha)}(-e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}+1) & \sqrt{\lambda(1-\alpha)}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1) & 0 \end{vmatrix} -$$

$$-\begin{vmatrix} e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1 & e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1 \\ 0 & \sqrt{\lambda(1-\alpha)}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1) & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1 & e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1 \\ 0 & \sqrt{\lambda(1+\alpha)}(-e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}+1) & 0 \end{vmatrix} -$$

$$-\begin{vmatrix} e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1 & e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1 \\ 0 & \sqrt{\lambda(1+\alpha)}(-e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}+1) & \sqrt{\lambda(1-\alpha)}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1) \end{vmatrix}$$

Далее вновь применяем метод понижения порядка, раскладывая каждый определитель по "подходящей"строке

$$(e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1)\sqrt{\lambda(1-\alpha)} \begin{vmatrix} e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1 & e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1 \\ (e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1) & 0 \end{vmatrix} - (e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1)\sqrt{\lambda(1-\alpha)}\text{x}$$

$$\text{x}\begin{vmatrix} e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1 & e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1 \\ e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1 & 0 \end{vmatrix} - (e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1)\sqrt{\lambda(1+\alpha)} \begin{vmatrix} e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1 & e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1 \\ 0 & -e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}+1 \end{vmatrix} +$$

$$+(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1)\sqrt{\lambda(1+\alpha)} \begin{vmatrix} e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1 & e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1 \\ 0 & -e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}+1 \end{vmatrix}$$

Заметим, что определители второго порядка одинаковы в первом и втором слагаемом, а также в третьем и четвертом. С учетом этого выполняем группировку, попутно раскрывая определители. Получаем

$-\sqrt{\lambda(1-\alpha)}(\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1)(e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}+1)(e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}})-\sqrt{\lambda(1+\alpha)}(\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1)(e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}-1)(-e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}})$

Домножим и разделим наше выражение на $e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}$:

$e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}(\sqrt{\lambda(1-\alpha)}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1)^2(e^{2\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1)+\sqrt{\lambda(1+\alpha)}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1)^2(e^{2\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}-1)=$

$$= e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1)(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1)(\sqrt{\lambda(1-\alpha)}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1)(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}+1)+$$

$$+\sqrt{\lambda(1+\alpha)}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1)(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}-1))$$

Приравнивая полученное выражение к нулю, будем иметь 3 возможности:

$$e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1=0 \tag{46}$$

$$e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1=0 \tag{47}$$

$$\sqrt{(1-\alpha)}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1)(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}+1)+\sqrt{(1+\alpha)}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1)(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}-1)=0 \tag{48}$$

Рассмотрим каждую из них в отдельности.

1. Из уравнения (46) найдем, что

$$\lambda=-(1-\alpha)(\pi+2\pi n)^2, n\in Z \tag{49}$$

Подставляя в условия (42)-(45) найденные значения, будем иметь следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1+C_2+C_3+C_4=0 \\ C_1(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1)+C_2(e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1)=0 \\ C_2(e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1)=0 \end{cases} \tag{50}$$

Последняя строка в (50) дает нам 2 возможных варианта:
а) $C_2=0$, тогда $C_1=0$ и $C_3=-C_4$. Мы получили семейство решений

$$u_1=C_3(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}t}-e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}t})=C\sin(\sqrt{\frac{-\lambda}{1-\alpha}}t) \tag{51}$$

$$u_2 = -C_3(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}t} - e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}t}) = -C\sin(\sqrt{\frac{-\lambda}{1-\alpha}}t) \tag{52}$$

b) $e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}} - 1 = 0$. Имеем
$e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}} = e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}} = (\cos(\pi+2\pi n)-i\sin(\pi+2\pi n))^{\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}} = \cos((\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}})(\pi+2\pi n)) - i\sin((\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}})(\pi+2\pi n)) = 1$
Отсюда получаем условие на коэффициенты разностного оператора $(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}})(\pi+2\pi n) = 2\pi l$, $l \in Z \setminus 0, n \in Z, nl > 0$ или

$$\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} = \frac{2l}{1+2n}, \tag{53}$$

$l \in Z \setminus 0, n \in Z, nl > 0$ Из условий (42)-(45) остается лишь условие

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0 \tag{54}$$

Таким образом, получаем семейство решений:

$$u_1 = C_1 e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}t} + C_3 e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}t} - (C_1+C_2+C_3)e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}t} \tag{55}$$

$$u_2 = C_1 e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}t} - C_3 e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}t} + (C_1+C_2+C_3)e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}t} \tag{56}$$

2. Из уравнения (47) найдем, что

$$\lambda = -4(1+\alpha)\pi^2 k^2, k \in Z \setminus 0 \tag{57}$$

Вновь подставляя в условия (42)-(45) найденные значения, будем иметь:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0 \\ C_3(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}} + 1) + C_4(e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}} + 1) = 0 \\ C_3(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}} + 1) = 0 \end{cases} \tag{58}$$

Аналогично предыдущему случаю, здесь мы также получаем 2 возможности. Ясно, что случай $e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}} + 1 = 0$ полностью совпадает со случаем b) предыдущего пункта. Разберем случай $C_3 = 0$. Тогда $C_4 = 0$ и $C_1 = -C_2$. Мы получим семейство решений

$$u_1 = C_1(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}t} - e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}t}) = C\sin(\sqrt{\frac{-\lambda}{1+\alpha}}t) \tag{59}$$

$$u_2 = C_1(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}t} - e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}t}) = C\sin(\sqrt{\frac{-\lambda}{1+\alpha}}t) \tag{60}$$

3. В отличие от предыдущих двух случаев, квазимногочлен (48) несколько сложнее для исследования.Упростим его. Домножим на выражение $\frac{e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}}{\sqrt{1-\alpha}}$. Получим

$$(e^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}})(e^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}+e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}})+\frac{\sqrt{(1+\alpha)}}{\sqrt{(1-\alpha)}}(e^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}})(e^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}-e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}})=0 \tag{61}$$

Вначале будем считать, что $|\alpha|<1$, т.е. оператор R - отрицательно определенный.Это означает, что все его собственные значения отрицательны.

При $\lambda<0$ из (48) получаем

$$4\cos(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\lambda}{1-\alpha}})\cos(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\lambda}{1+\alpha}})+(2i)(2i)\frac{\sqrt{(1+\alpha)}}{\sqrt{(1-\alpha)}}\sin(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\lambda}{1-\alpha}})\sin(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\lambda}{1+\alpha}})=0 \tag{62}$$

или

$$1-\frac{\sqrt{(1+\alpha)}}{\sqrt{(1-\alpha)}}\tan(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\lambda}{1-\alpha}})\tan(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\lambda}{1+\alpha}})=0 \tag{63}$$

Уравнение (48) имеет бесконечно много действительных отрицательных корней. Положим для определенности $0<\alpha<1$.
Известно, что тангенс терпит разрывы в точках $\frac{\pi}{2}+\pi k$. Обозначим,

$$f(x)=\tan(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-x}{1-\alpha}})\tan(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-x}{1+\alpha}}) \tag{64}$$

Функция $f(x)$ имеет разрывы в точках $x=-(1-\alpha)(\frac{\pi}{2}+\pi k)^2$ и $x=-(1-\alpha)(\frac{\pi}{2}+\pi k)^2, k\in Z$. Рассмотрим полуинтервал $-(1-\alpha)\frac{\pi}{2}<x\leq 0$ (в случае $-1<\alpha<0$ следует рассмотреть интервал $-(1+\alpha)\frac{\pi}{2}<x\leq 0$). Очевидно, что на этом промежутке у функции $f(x)$ нет точек разрыва, при этом на левом конце функция стремится к $+\infty$, на правом принимает значение 0. По теореме Вейерштрасса найдется точка x_0, такая что $f(x_0)=\frac{\sqrt{(1-\alpha)}}{\sqrt{(1+\alpha)}}$. Далее, в силу периодичности тангенса можно заключить, что существует счетное множество $X=\{x: f(x)=\frac{\sqrt{(1-\alpha)}}{\sqrt{(1+\alpha)}}\}$.

Рассмотрим теперь следующую задачу:

$$u_1''+\alpha u_2''=\lambda u_1 \tag{65}$$

$$\alpha u_1''+u_2''=\lambda u_2 \tag{66}$$

$$u_1(0)=0 \tag{67}$$

$$u_2(1)=0 \tag{68}$$

$$u_1(1)=u_2(0) \tag{69}$$

$$u_1'(1) = u_2'(0) \tag{70}$$

От рассмотренной выше она отличается измененным последним условием, которое обозначает принадлежность нашего решения классу $H^2(0,2)$.

Общее решение этой задачи также записывается в виде (36), (37). Составим определитель для системы, образованной краевыми условиями. Имеем:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}} & e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}} & -e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}} & -e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}} \\ e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1 & e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1 & e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1 & e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1 \\ \sqrt{\frac{\lambda}{(1+\alpha)}}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1) & \sqrt{\frac{\lambda}{(1+\alpha)}}(-e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}+1) & \sqrt{\frac{\lambda}{(1-\alpha)}}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1) & \sqrt{\frac{\lambda}{(1-\alpha)}}(-e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}-1) \end{vmatrix}$$

Находим, что определитель равен

$$4\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1)(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1)(\sqrt{\frac{\lambda}{(1-\alpha)}}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1)(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}+1)+ \sqrt{\frac{\lambda}{(1+\alpha)}}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1)(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}-1))$$

Приравнивая полученное выражение к нулю, будем иметь 3 возможности:

$$e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1=0 \tag{71}$$

$$e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1=0 \tag{72}$$

$$\sqrt{\frac{\lambda}{(1-\alpha)}}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}+1)(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}+1)+\sqrt{\frac{\lambda}{(1+\alpha)}}(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}}-1)(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}}-1)=0 \tag{73}$$

Как видим, первые два случая аналогичны предыдущей задаче. Данным фактом подтверждается, что эти λ соответствуют решениям из класса $H^2(0,2)$.

Для того, чтобы отсутствовали гладкие решения, необходимо, чтобы уравнения (48) и (73) не имели общих корней. Покажем это.

Как и ранее, будем считать, что $|\alpha|<1$.
Случай $\lambda>0$ рассматривать не имеет смысла, т.к. все корни (48) были отрицательными.

Если же $\lambda<0$, то (73) принимает вид

$$4\cos(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\lambda}{1-\alpha}})\cos(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\lambda}{1+\alpha}})+(2i)(2i)\frac{\sqrt{(1-\alpha)}}{\sqrt{(1+\alpha)}}\sin(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\lambda}{1-\alpha}})\sin(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\lambda}{1+\alpha}})=0 \tag{74}$$

или

$$1-\frac{\sqrt{(1-\alpha)}}{\sqrt{(1+\alpha)}}\tan(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\lambda}{1-\alpha}})\tan(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\lambda}{1+\alpha}})=0 \tag{75}$$

Остается сравнить корни уравнений (75) и (63). Имеем

$$1-\frac{\sqrt{(1-\alpha)}}{\sqrt{(1+\alpha)}}\tan(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\lambda}{1-\alpha}})\tan(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\lambda}{1+\alpha}})=1-\frac{\sqrt{(1+\alpha)}}{\sqrt{(1-\alpha)}}\tan(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\lambda}{1-\alpha}})\tan(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\lambda}{1+\alpha}})=0 \tag{76}$$

Далее

$$\frac{\sqrt{(1-\alpha)}}{\sqrt{(1+\alpha)}}\tan(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\lambda}{1-\alpha}})\tan(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\lambda}{1+\alpha}})=\frac{\sqrt{(1+\alpha)}}{\sqrt{(1-\alpha)}}\tan(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\lambda}{1-\alpha}})\tan(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\lambda}{1+\alpha}}) \tag{77}$$

или

$$(\frac{\sqrt{(1-\alpha)}}{\sqrt{(1+\alpha)}}-\frac{\sqrt{(1+\alpha)}}{\sqrt{(1-\alpha)}})\tan(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\lambda}{1-\alpha}})\tan(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\lambda}{1+\alpha}})=0 \tag{78}$$

Получаем 2 возможности:

$$\frac{\sqrt{(1-\alpha)}}{\sqrt{(1+\alpha)}}-\frac{\sqrt{(1+\alpha)}}{\sqrt{(1-\alpha)}}=0 \tag{79}$$

либо

$$\tan(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\lambda}{1-\alpha}})\tan(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\lambda}{1+\alpha}})=0 \tag{80}$$

Очевидно, что если выполнено (80), то λ не является корнем ни уравнения (75) ни (63). Обозначим, $k=\frac{\sqrt{(1-\alpha)}}{\sqrt{(1+\alpha)}}$, тогда (79) эквивалентно уравнению

$$k-\frac{1}{k}=0 \tag{81}$$

откуда $k=\pm 1$. В силу неотрицательности значения квадратного корня, получим, что $\frac{\sqrt{(1-\alpha)}}{\sqrt{(1+\alpha)}}=1$ и $\alpha=0$, что противоречит нашим начальным предположениям.

Таким образом, заключаем, что уравнения (75) и (63) не имеют общих корней. Это означает, что решения изначальной задачи, которые соответствуют собственным числам-решениям (63) не принадлежат классу $H^2(0,2)$.

5 Заключение

В данной работе мы рассмотрели вопрос о существовании негладких собственных функций для отрицательно - определенного дифференциально-разностного оператора на интервале (0,2). Нами было показано, что данная задача сводится к исследованию трансцендентного уравнения. Окончательно, выявлено, что краевая задача на собственные функции для отрицательно-определенного дифференциально-разностного оператора имеет бесконечное число как гладких решений, так и решений, для которых гладкость нарушается.

Открытым остается вопрос: при каких условиях на оператор краевая задача будет иметь негладкие решения. В дальнейшем мы планируем детально изучить данный вопрос.

Список литературы

[1] Н. Н. Красовский, Теория управления движения. Линейные системы, Наука, М., 1968.

[2] Г. А. Каменский, А. Д.Мышкис, К постановке краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и несколькими старшими членами, Дифференц. уравнения, 1974, том 10, номер 3, 409–418

[3] А. Г. Каменский, Краевые задачи для уравнений с формально симметричными дифференциально-разностными операторами, Дифференц. уравнения, 1976, том 12, номер 5, 815–824

[4] Каменский Г. А., Мышкис А. Д., Скубачевский А. Л., О гладких решениях краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа, Укр. мат. ж., 1985, том 37, номер 5 , 581–585

[5] Skubachevskii A. L., Elliptic Functional Differential Equations and Applications, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1997

[6] Д. А. Неверова, А. Л. Скубачевский, О классических и обобщенных решениях краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами, Матем. заметки, 2013, том 94, выпуск 5, 702–719

[7] Д. А. Неверова, А. Л. Скубачевский, Классические решения краевых задач для дифференциально-разностных уравнений, Дифференц. уравнения, 2013, том 49, выпуск 3, 300–309