МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ»
Факультет Физико-Математических и Естественных Наук
Математический Институт им. С.М. Никольского

«Допустить к защите»
Директор Математического
Института им. С.М. Никольского
Муравник А.Б.
«________» ____________________ 2022 г.

Выпускная квалификационная работа Бакалавра

Направление: 01.03.01 Математика

Гарантированные оценки ошибок для приближенных решений задачи с препятствием для оператора p-Лапласа

Выполнил студент: Новикова Анна Андреевна
Группа: НМТбд-01-18
Студ. билет: 1032182557

Обучающийся ____________ Новикова А.А.

Руководитель ____________ Апушкинская Д.Е. д.ф.-м.н., проф.

г. Москва
2022 г.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ»

АННОТАЦИЯ

выпускной квалификационной работы

Новикова Анна Андреевна
(фамилия, имя, отчество)

на тему: «Гарантированные оценки ошибок для приближенных решений задачи с препятствием для оператора p-Лапласа»

Данная работа посвящена получению гарантированных оценок ошибки для приближенного решения эллиптической задачи с препятствием для оператора p-Лапласа. В первой главе представлена постановка задачи, дано обоснование актуальности данного исследования. Вторая глава посвящена получению апостериорной оценки для «модельной» эллиптической задачи с препятствием ($p = 2$). В ней содержатся основное тождество ошибки, а также расширение допустимого множества для приближенных решений в сопряженном пространстве и, как следствие, искомая оценка полной меры отклонения приближенного решения от точного в виде неравенства с полностью вычисляемой мажорантой в правой части. Третья глава является обобщением разультатов, полученных в предыдущей главе, на случай p-Лапласа; также здесь была найдена мажоранта ошибки для допустимых значений параметра p. Итоги данного исследования представлены в последней главе.

Автор ВКР ____________ ____________________

(Подпись) (ФИО)

Содержание

1 Введение

В работе рассматривается эллиптическая задача с препятствием для оператора p-Лапласа. Данная проблема может быть сформулирована в виде вариационного неравенства:

$$\text{найти } \ u \in \mathbb{K} : \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla (u - v) \, \mathrm{dx} \geq \int\limits_{\Omega} f (v - u) \, \mathrm{dx} \quad \forall v \in \mathbb{K}, \quad (1.1)$$

где $\Omega \in \mathbb{R}^n$ - ограниченная область, ϕ является достаточно гладкой функцией препятствия, удовлетворяющей условию $\phi \leq 0$ на границе области $\partial\Omega$, при этом $p > 1$, f - измеримая функция из пространства $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, а $\mathbb{K}$ - замкнутое выпуклое множество, определяемое как

$$\mathbb{K} = \left\{ v \in W_0^{1,p}(\Omega) : v \geq \phi \text{ в } \Omega \right\}.$$

Уравнения с p-лапласианом объединили в себе несколько важных разделов математики и математической физики: уравнения в частных производных, вариационное исчисление, теорию функций и теорию потенциала, а также даже теорию вероятностей. Оператор Лапласа является хорошей моделью для описания задач с препятствиями, возникающими в природе, но тем не менее существует множество нелинейных явлений, которые не могут быть аппроксимированы линейными моделями [1]. Так, например, оператор p-Лапласа возникает в физических задачах на тепловое излучение и задачах с неоднородными величинами (например, плотностью); р-лапласиан появляется даже в таком разделе физики, как реология. Более того, он тесно связан с транспортной проблемой Монжа-Канторовича и математической игрой «Tug of War» (случай $p = \infty$).

Задача (1.1) является задачей со свободной границей. Она может быть сведена к минимизации функционала энергии

$$J[v] = \int\limits_{\Omega} (\frac{1}{p} |\nabla v|^p - fv) \, \mathrm{dx}$$

на множестве $\mathbb{K}$. Существование и единственность ее решения хорошо известны (см., например, [2], [3]). Кроме того, в работах [4] и [5] была изучена оптимальная гладкость решений. В диссертации [6] автор также приводит фундаментальные решения данной проблемы с p-лапласианом для случая $p \in (1, \infty]$. Более того, было изучено асимптотическое поведение точных решений оператора для случая $p \to \infty$ (см., например, [7]). Вопросом регулярности свободной границы для поставленной задачи посвящена статья [8]. В ней представлены однородные глобальные решения в явном виде для случая, когда $p \neq 2$, свободные границы которых образуют угол с вершиной в начале координат.

Одним из направлений исследований задач со свободными границами является вывод оценок отклонения точного решения от приближенного. Для ряда других задач этот вопрос изучался в работах [9], [10], [11] и [12]. Стоит отметить, что в работе [10] оценка ошибки отклонения была получена тремя разными методами для поставленной задачи в случае $p = 2$. Из проведенного в этой статье анализа были сделаны выводы о качестве и эффективности получаемой оценки: наилучшие результаты давал метод двойственных мажорант, основанный на теории функционального анализа и вариационного исчисления. Данный метод также представлен в статьях [9], [11] и [12]. Именно методом двойственных мажорант в нашей работе будет найдена гарантированная оценка разности точного и приближенного решений задачи с препятствием для оператора p-Лапласа, поскольку он позволяет получить качественную необходимую полностью вычисляемую оценку ошибки.

Отметим, что до данной работы результаты по нахождению гарантированной оценки ошибки для полной меры отклонения приближенного решения от точного в эллиптической задаче с препятствием для p-лапласиана получены не были.

2 Получение апостериорной оценки для эллиптической задачи с препятствием для оператора Лапласа

В этой главе представлено получение гарантированной оценки отклонения приближенного решения для частного случая поставленной задачи, а именно эллиптической задачи с препятствием для оператора Лапласа ($p = 2$).

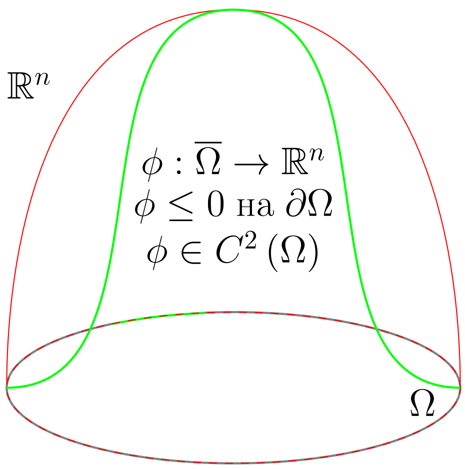

Рис. 1: Модельная задача с препятствием

Рассмотрим постановку «модельной»[1] задачи, которая имеет следующий вариационный вид:

$$J[u] := \inf_{v \in \mathbb{K}} J[v], \tag{2.1}$$

где функции u и v являются точным и приближенным решениями данной задачи соответственно, а функционал $J[v]$ определяется как

$$J[v] = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla v|^2 - fv\right) \mathrm{dx},$$

$$\mathbb{K} = \left\{ v \in W_2^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0, v \ge \phi \text{ в } \Omega \right\},$$

$$\phi \in C^2(\Omega), \phi \le 0 \text{ на } \partial\Omega, f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Представим функционал $J[v]$ в виде суммы двух функционалов:

$$J[v] := G(\Lambda v) + F(v),$$

где

$$\Lambda : V \to Y,$$

$$V = \left\{ v \in W_2^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0 \right\} = H_0^1(\Omega),$$

$$Y = L^2(\Omega, \mathbb{R}^n),$$

$$\Lambda = \nabla.$$

[1] Говоря о «модельной» или «классической» задаче, мы будем иметь ввиду широко известную краевую задачу эллиптического типа.

Тогда выпуклый функционал $G : Y \to \mathbb{R}$ имеет вид:

$$G(y) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |y|^2 \, \mathrm{dx} = \frac{1}{2} \left|\left|y\right|\right|^2_{L^2},$$

$$G(\Lambda y) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 \, \mathrm{dx}.$$

$G(y)$ неотрицателен для любой функции $y \in Y$, $G(y) = 0$ тогда и только тогда, когда $y = 0_Y$, а также является коэрцитивным.

В свою очередь, функционал $F(v)$ определяется таким образом, что

$$F(v) = -\int\limits_{\Omega} fv \, \mathrm{dx} + \chi_{\mathbb{K}}(v), \text{ где } \chi_{\mathbb{K}}(v) = \begin{cases} 0, v \in \mathbb{K}, \\ +\infty, v \notin \mathbb{K}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Теперь для задачи (2.1) необходимо определить двойственную задачу, точное решение которой обозначим через p^*. Она состоит в максимизации функционала, также представимого в виде суммы двойственных к $G(\Lambda v)$ и $F(v)$ функционалов:

$$I^*[y^*] = -G^*(y^*) - F^*(-\Lambda^* y^*),$$

$G^* : Y^* \to \mathbb{R}$, $F^* : V^* \to \mathbb{R}$. Здесь V^* является пространством линейных непрерывных функционалов, действующих на функции из V. В нашем случае $V^* = H^{-1}(\Omega)$. При этом $\langle v^*, v\rangle = \int\limits_{\Omega} v^* v \, \mathrm{dx}$ и $Y^* = Y = L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Тогда

$$G^*(y^*) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |y^*|^2 \, \mathrm{dx},$$

$$\Lambda^* = \mathrm{div},$$

поскольку оператор дифференцирования Λ^*, двойственный к оператору $\Lambda = \nabla$ и действующий из пространства Y^* в двойственное пространство V^*, по определению должен удовлетворять условию $(y^*, \Lambda w) = \langle \Lambda^* y^*, w\rangle$, верному для любых функций $w \in V$ и $y^* \in Y^*$.

Для определения функционала, сопряженного к $F(v)$, необходимо ввести промежуточное гильбертово пространство $\mathcal{V} = L^2(\Omega)$, такое, что

$$V \subset \mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}^* \subset V^*.$$

Если $v^* \in \mathcal{V}$, то спаривание элементов v^* и v представимо в виде интеграла: $\langle v^*, v\rangle = \int\limits_\Omega v^* v \,\mathrm{dx}$, а также если $y^* \in Y^*_{\Lambda^*} := \{y^* \in Y^* : \Lambda^* y^* \in \mathcal{V}^*\} \subset Y^*$, то $(y^*, \Lambda w) = \langle \Lambda^* y^*, w\rangle_{\mathcal{V}}$ для любой функции $w \in V$.

Для получения выражения функционала $F^*(-\Lambda^* y^*)$ в явном виде немного «сузим» пространство Y^* (см. рис. 2), добавив дополнительное условие на аппроксимации двойственной задачи:

$$y^* \in H(\Omega, \mathrm{div}) = \left\{y^* \in Y^* : \mathrm{div}\, y^* \in L^2(\Omega)\right\}.$$

Таким образом, для функционала (2.2) получаем двойственный:

$$F^*(-\Lambda^* y^*) = \sup_{v \in \mathbb{K}} \left\{ \int\limits_\Omega (f + \mathrm{div}\, y^*)\, v \,\mathrm{dx} \right\} \quad \forall y^* \in H(\Omega, \mathrm{div}). \tag{2.3}$$

Затем рассмотрим некоторую заданную функцию $\hat{v} \in \mathbb{K}$. Тогда $\hat{v} + w \in \mathbb{K}$, где $w \in V^+(\Omega)$:

$$V^+(\Omega) = \{w \in V(\Omega) : w \geq 0 \text{ почти всюду в } \Omega\}.$$

Следовательно, функционал $F^*(-\Lambda^* y^*)$ оценивается снизу:

$$F^*(-\Lambda^* y^*) \geq \int\limits_\Omega (f + \mathrm{div}\, y^*)\, \hat{v} \,\mathrm{dx} + \sup_{w \in V^+(\Omega)} \left\{ \int\limits_\Omega (f + \mathrm{div}\, y^*)\, w \,\mathrm{dx} \right\}. \tag{2.4}$$

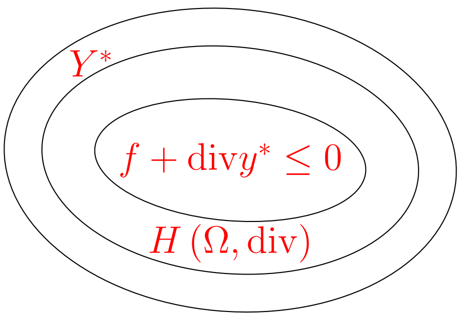

Рис. 2: Сужение Y^*

Поскольку фунция w является неотрицательной в пространстве $V^+(\Omega)$, то при условии $(f + \mathrm{div}\, y^*) > 0$ на множестве нулевой меры в Ω супремум, стоящий в правой части неравенства (2.4), не является конечным. В таком случае (2.3) невозможно представить в явном виде. В силу конечности sup, получаем дополнительное ограничение на функции y^*:

$$f + \mathrm{div}\, y^* \leq 0 \text{ почти всюду на } \Omega. \tag{2.5}$$

Пусть имеется последовательность $v_k \xrightarrow{L^2(\Omega)} \phi$. Тогда, согласно указанному выше,

$$F^*(-\Lambda^* y^*) = \int\limits_\Omega (f + \mathrm{div}\, y^*)\, \phi \,\mathrm{dx}. \tag{2.6}$$

Теорема 2.1. (см. [13]) *Пусть u, p^* - точные решения прямой и двойственной задач соответственно. Тогда для любых функций $v \in V$ и $y^* \in Y^*$ верно тождество ("main error identity"):*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_G(\Lambda v, p^*) + \mathcal{D}_G(\Lambda u, y^*) + \mathcal{D}_F(v, -\Lambda^* p^*) + \mathcal{D}_F(u, -\Lambda^* y^*) = \\ = \mathcal{D}_G(\Lambda v, y^*) + \mathcal{D}_F(v, -\Lambda^* y^*),\end{aligned}$$

где

$$\mathcal{D}_G(\Lambda u, y^*) := G(\Lambda u) + G^*(y^*) - (y^*, \Lambda u), \tag{2.7}$$

$$\mathcal{D}_F(v, -\Lambda^* p^*) := F(v) + F^*(-\Lambda^* p^*) + \langle \Lambda^* p^*, v\rangle. \tag{2.8}$$

Чтобы получить аналогичное тождество для конкретной задачи (2.1), необходимо определить все представленные в утверждении этой теоремы составные функционалы.

Пользуясь тем, что $G(y) := \frac{1}{2}||y||^2_{L^2}$, $G^*(y^*) = \frac{1}{2}||y^*||^2_{L^2}$ и, следовательно, $G(\Lambda u) = \frac{1}{2}||\nabla u||^2_{L^2}$, получаем определения функционалов $\mathcal{D}_G$:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_G(\Lambda u, y^*) &= \frac{1}{2}||\nabla u||^2_{L^2} + \frac{1}{2}||y^*||^2_{L^2} - (y^*, \nabla u) = \\ &= \frac{1}{2}||\nabla u||^2_{L^2} + \frac{1}{2}||y^*||^2_{L^2} - \int\limits_\Omega \nabla u \cdot y^* \,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}||\nabla u - y^*||^2_{L^2},\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\mathcal{D}_G(\Lambda v, p^*) = \frac{1}{2}||\nabla v||^2_{L^2} + \frac{1}{2}||p^*||^2_{L^2} - \int\limits_\Omega \nabla v \cdot p^* \,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}||\nabla v - p^*||^2_{L^2}, \tag{2.10}$$

$$\mathcal{D}_G(\Lambda v, y^*) = \frac{1}{2}||\nabla v - y^*||^2_{L^2}. \tag{2.11}$$

В силу равенства $F(u) = -\int\limits_\Omega f u \,\mathrm{dx}$, выражения (2.6) и условия (2.5), заключаем, что

$$\langle \Lambda^* y^*, u\rangle = -\int\limits_\Omega \operatorname{div} y^* \cdot u \,\mathrm{dx},$$

и поэтому мы также можем определить функционал $\mathcal{D}_F(u, -\Lambda^* y^*)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_F(u, -\Lambda^* y^*) &= -\int\limits_{\Omega} f u \,\mathrm{dx} + \int\limits_{\Omega} (f + \operatorname{div} y^*)\,\phi\,\mathrm{dx} - \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} y^* \cdot u \,\mathrm{dx} = \\ &= \int\limits_{\Omega} (f + \operatorname{div} y^*)(\phi - u)\,\mathrm{dx}.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Замечание 2.1. *Для нахождения $\mathcal{D}_F(v, -\Lambda^* p^*)$ надо проверить будет ли p^* принадлежать множеству $H(\Omega, \operatorname{div})$ и удовлетворять условию (2.5) почти всюду в Ω.*

Известно, что p^* является точным решением сопряженной задачи $I^*[p^*]$, и, кроме того, $I^*[p^*] = J[u]$, что в свою очередь означает, что $p^* = \nabla u$. Тогда $f + \operatorname{div} p^* = f + \operatorname{div} \nabla u = f + \Delta u = 0$, где равенство нулю следует из уравнения Эйлера-Лагранжа. Более того, $\operatorname{div} p^* \in L^2(\Omega)$, $\operatorname{div} p^* = \Delta u$, $u \in H_0^1(\Omega)$.

Существуют два способа вычислить $F^*(-\Lambda^* p^*)$:

1. Можно показать, что $\operatorname{div} p^* = \operatorname{div} \nabla u = \Delta u \in L^2(\Omega)$. Теория задач со свободными границами говорит о том, что точное решение u обладает следующими свойствами:

$$\begin{gathered}\Delta u = -f \text{ в } \Omega \cap \{u > \phi\}, \\ \Delta u = \Delta\phi \text{ в } \Omega \cap \{u = \phi\}, \\ (\Delta u + f)(u - \phi) = 0 \text{ почти всюду в } \Omega, \\ u \in W^2_{\alpha,\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ для любого } 1 < \alpha < \infty.\end{gathered}$$

2. Ранее было получено, что

$$J[v] - J[u] = \mathcal{D}_G(\Lambda v, p^*) + \mathcal{D}_F(v, -\Lambda^* p^*). \tag{2.13}$$

В соответствии с (2.13) положим $v = u$, и тогда сумма

$$\mathcal{D}_G(\Lambda u, p^*) + \mathcal{D}_F(u, -\Lambda^* p^*) = 0,$$

причем

$$\mathcal{D}_G(\Lambda u, p^*) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u - p^*|^2\,\mathrm{dx} = 0,$$

откуда следует, что

$$F^*(-\Lambda^* p^*) = -F(u) - \langle \Lambda^* p^*, u\rangle = \int\limits_\Omega f u \,\mathrm{dx} + \int\limits_\Omega \operatorname{div} p^* \cdot u \,\mathrm{dx}, \quad (2.14)$$

$$\langle \Lambda^* p^*, v\rangle = (p^*, \nabla v) = \int\limits_\Omega p^* \nabla v \,\mathrm{dx} = -\int\limits_\Omega \operatorname{div} p^* \cdot v \,\mathrm{dx}\,. \quad (2.15)$$

Подставляя в (2.11) полученные выражения (2.2), (2.14) и (2.15), находим представления оставшихся составных функционалов $\mathcal{D}_F$:

$$\mathcal{D}_F(v, -\Lambda^* p^*) = \int\limits_\Omega (f + \operatorname{div} p^*)(u - v)\,\mathrm{dx} \quad (2.16)$$

и

$$\mathcal{D}_F(v, -\Lambda^* y^*) = \int\limits_\Omega (f + \operatorname{div} y^*)(\phi - v)\,\mathrm{dx}\,. \quad (2.17)$$

Согласно утверждению теоремы 2.1, при подстановке в него (2.9), (2.10), (2.11), а также (2.12), (2.16) и (2.17), у нас будет выполняться равенство:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\,||\nabla v - p^*||^2_{L^2} + \frac{1}{2}\,||\nabla u - y^*||^2_{L^2} + \\ + \int\limits_\Omega (f + \operatorname{div} p^*)(u - v)\,\mathrm{dx} + \int\limits_\Omega (f + \operatorname{div} y^*)(\phi - u)\,\mathrm{dx} = \\ = \frac{1}{2}\,||\nabla v - y^*||^2_{L^2} + \int\limits_\Omega (f + \operatorname{div} y^*)(\phi - v)\,\mathrm{dx}\,.\end{gathered}$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2}\,||\nabla v - p^*||^2_{L^2} = \frac{1}{2}\,||\nabla(v - u)||^2_{L^2}\,,$$

и, кроме того, для точного решения двойственной задачи мы знаем, что на том множестве, где точное решение прямой задачи не совпадает с функцией препятствия, $f + \Delta u = 0$ почти всюду в Ω. Поэтому

$$\int\limits_\Omega (f + \operatorname{div} p^*)(u - v)\,\mathrm{dx} = \int\limits_{\{u=\phi\}} (f + \Delta u)(u - v)\,\mathrm{dx}\,.$$

В свою очередь,

$$\frac{1}{2}\,||\nabla u - y^*||^2_{L^2} = \frac{1}{2}\,||p^* - y^*||^2_{L^2}\,,$$

и

$$\int\limits_{\Omega} \left(f + \operatorname{div} y^*\right)(\phi - u)\,\mathrm{dx} = \int\limits_{\{u>\phi\}} \left(f + \operatorname{div} y^*\right)(\phi - u)\,\mathrm{dx},$$

поскольку при $u = \phi$ их разность обращается в ноль.

Таким образом, мы можем определить выражения, стоящие в левой части тождества теоремы 2.1:

$$\mu(v) := \frac{1}{2}\left\|\nabla(v - u)\right\|_{L^2}^2 + \int\limits_{\{u=\phi\}} (f + \Delta u)(u - v)\,\mathrm{dx}, \tag{2.18}$$

$$\mu^*(y^*) = \frac{1}{2}\left\|p^* - y^*\right\|_{L^2}^2 + \int\limits_{\{u>\phi\}} \left(f + \operatorname{div} y^*\right)(\phi - u)\,\mathrm{dx}\,. \tag{2.19}$$

Здесь формула (2.18) является суммой нормы отклонения приближенного решения от точного прямой задачи по норме в W_2^1 и неотрицательной нелинейной меры. В формуле (2.19) первое слагаемое правой части - норма отклонения точного решения p^* от приближенного y^* двойственной задачи, а второе, аналогично, неотрицательная мера.

Итак, объединяя полученные результаты, заключаем, что верна следующая теорема.

Теорема 2.2. *Для любых функций $v \in \mathbb{K}$ и $y^* \in H(\Omega, \operatorname{div})$ таких, что $f + \operatorname{div} y^* \leq 0$ почти всюду в Ω, полная мера отклонения этих функций от точных решений прямой и двойственной задач (u и p^* соответственно) удовлетворяет следующему тождеству:*

$$\mu(v) + \mu^*(y^*) = \frac{1}{2}\left\|\nabla v - y^*\right\|_{L^2}^2 + \int\limits_{\Omega} \left(f + \operatorname{div} y^*\right)(\phi - v)\,\mathrm{dx}, \tag{2.20}$$

где слагаемые, представленные в левой части равенства, определены формулами (2.18) и (2.19).

На этом этапе получения оценки возникает некоторая «проблема», поскольку функции $y^* \in H(\Omega, \operatorname{div})$ должны удовлетворять достаточно неудобному для практического использования условию $\left(f + \operatorname{div} y^*\right) \leq 0$ почти всюду в Ω. Покажем, как можно расширить допустимое множество для y^*, избавившись от дополнительного условия на эти функции.

Лемма 2.1. *Для любой функции* $z^* \in H(\Omega, \operatorname{div})$ *справедливо неравенство*

$$\inf_{y^* \in Q_{\le 0}} \frac{1}{2} \|z^* - y^*\|^2_{L^2} \le \frac{1}{2} C_F^2 \left\|(f + \operatorname{div} z^*)_+\right\|^2_{L^2}, \tag{2.21}$$

где $(f + \operatorname{div} z^*)_+ = \max\{f + \operatorname{div} z^*, 0\}$, C_F *- константа из неравенства Фридрихса:*

$$\|w\|_{L^2} \le C_F \|\nabla w\|_{L^2} \quad \forall w \in V(\Omega), \tag{2.22}$$

а

$$Q_{\le 0} := \{y^* \in H(\Omega, \operatorname{div}) : (f + \operatorname{div} y^*) \le 0 \text{ почти всюду в } \Omega\}. \tag{2.23}$$

Доказательство. Вспомним, что $V^+(\Omega)$ - пространство неотрицательных почти всюду на Ω функций из V, и рассмотрим некоторую функцию $z^* \in H(\Omega, \operatorname{div})$, для которой будет выполняться равенство

$$\begin{aligned}\sup_{w \in V^+(\Omega)} \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |z^* - y^*|^2 + fw - z^* \nabla w\right) \mathrm{dx} = \\ = \frac{1}{2} \int_\Omega |z^* - y^*|^2 \mathrm{dx} + \sup_{w \in V^+(\Omega)} \int_\Omega (fw - z^* \nabla w) \mathrm{dx} = \\ = \frac{1}{2} \|z^* - y^*\|^2_{L^2} + \sup_{w \in V^+(\Omega)} \int_\Omega (f + \operatorname{div} z^*) w \, \mathrm{dx}.\end{aligned}$$

При этом

$$\sup_{w \in V^+(\Omega)} \int_\Omega (f + \operatorname{div} z^*) w \, \mathrm{dx} = \begin{cases} 0, \text{ если } f + \operatorname{div} z^* \le 0 \text{ почти всюду в } \Omega, \\ +\infty, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Соответственно получаем, что

$$\sup_{w \in V^+(\Omega)} \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |z^* - y^*|^2 + fw - z^* \nabla w\right) \mathrm{dx} = \begin{cases} \frac{1}{2} \|z^* - y^*\|^2_{L^2}, \text{ если } y^* \in Q_{\le 0}, \\ +\infty \text{ иначе.} \end{cases}$$

Оценим теперь $\inf\limits_{y^* \in Q_{\le 0}} \frac{1}{2} \|z^* - y^*\|^2_{L^2}$ для произвольного $z^* \in H(\Omega, \operatorname{div})$.

Функции y^* принадлежат гильбертову пространству Y^*, а $V^+(\Omega)$ - замкнутое выпуклое подмножество V, поэтому

$$\inf_{y^*\in Q_{\le 0}} \frac{1}{2}\left|\left|z^* - y^*\right|\right|^2_{L^2} = \inf_{y^*\in Y^*} \sup_{w\in V^+(\Omega)} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2}\left|z^* - y^*\right|^2 + fw - y^*\nabla w\right) \mathrm{dx} =$$

$$= \sup_{w\in V^+(\Omega)} \inf_{y^*\in Y^*} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2}\left|z^* - y^*\right|^2 + fw - y^*\nabla w\right) \mathrm{dx}\,.$$

Заметим, что все условия, позволяющие поменять местами inf и sup, выполняются. Далее, полагая $y^* = z^* + \nabla w$, мы получаем, что

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2}\left|\nabla w\right|^2 + fw - \left(z^* + \nabla w\right)\nabla w\right) \mathrm{dx} =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \left(-\frac{1}{2}\left|\nabla w\right|^2 + fw - z^*\nabla w\right) \mathrm{dx} = \int\limits_{\Omega} \left(-\frac{1}{2}\left|\nabla w\right|^2 + \left(f + \operatorname{div} z^*\right) w\right) \mathrm{dx}\,.$$

Итак,

$$\inf_{y^*\in Q_{\le 0}} \frac{1}{2}\left|\left|z^* - y^*\right|\right|^2_{L^2} = \sup_{w\in V^+(\Omega)} \int\limits_{\Omega} \left(-\frac{1}{2}\left|\nabla w\right|^2 + \left(f + \operatorname{div} z^*\right) w\right) \mathrm{dx} \le$$

$$\le \sup_{w\in V^+(\Omega)} \int\limits_{\Omega} \left(-\frac{1}{2}\left|\nabla w\right|^2 + \left(f + \operatorname{div} z^*\right)_+ w\right) \mathrm{dx},$$

где $\left(f + \operatorname{div} z^*\right)_+ = \max\left\{f + \operatorname{div} z^*, 0\right\}$.

Используем неравенство типа Фридрихса (2.22) с константой C_F, зависящей от геометрии Ω, неравенство Гёльдера для интегралов, а также переобозначим $\left|\left|\nabla w\right|\right|_{L^2} := \xi$. В таком случае мы можем получить оценку сверху для последнего интеграла:

$$\int\limits_{\Omega} \left(-\frac{1}{2}\left|\nabla w\right|^2 + \left(f + \operatorname{div} z^*\right)_+ w\right) \mathrm{dx} \le C_F \left|\left|\left(f + \operatorname{div} z^*\right)_+\right|\right|_{L^2} \left|\left|\nabla w\right|\right|_{L^2}.$$

Тогда

$$\inf_{y^*\in Q_{\le 0}} \frac{1}{2}\left|\left|z^* - y^*\right|\right|^2_{L^2} \le \sup_{w\in V^+(\Omega)} \left(-\frac{1}{2}\xi^2 + C_F \left|\left|\left(f + \operatorname{div} z^*\right)_+\right|\right|_{L^2} \xi\right) =$$

$$= \sup_{\xi\ge 0} \left(\xi\left\{A - \frac{1}{2}\xi\right\}\right),$$

где $A = C_F \left|\left|(f + \operatorname{div} z^*)_+\right|\right|_{L^2}$. Полагая $\xi = A$, получаем:

$$\sup_{\xi \geq 0} \left(-\frac{1}{2}\xi^2 + C_F \left|\left|(f + \operatorname{div} z^*)_+\right|\right|_{L^2} \xi \right) = \frac{1}{2}A^2 = \frac{1}{2}C_F^2 \left|\left|(f + \operatorname{div} z^*)_+\right|\right|^2_{L^2}.$$

Объединение полученных результатов приводит к необходимому неравенству (2.21), верному для любых функций $z^* \in H(\Omega, \operatorname{div})$. $\square$

Для получения оценки ошибки отклонения в виде неравенства будем использовать теорему 2.2 и лемму 2.1, и эта оценка будет выполняться для любых $z^* \in H(\Omega, \operatorname{div})$. Получим сначала с помощью неравенства Юнга с параметром β оценку снизу для меры $\mu^*(y^*)$:

$$\begin{aligned}
\mu^*(y^*) &= \frac{1}{2}\left|\left|p^* - y^*\right|\right|^2_{L^2} + \int\limits_{\{u>\phi\}} (f + \operatorname{div} y^*)(\phi - u)\,\mathrm{dx} = \\
&= \frac{1}{2}\left|\left|p^* - z^* + z^* - y^*\right|\right|^2_{L^2} + \\
&+ \int\limits_{\{u>\phi\}} (f + \operatorname{div}(y^* - z^* + z^*))(\phi - u)\,\mathrm{dx} \geq \\
&\geq \frac{(1-\beta)}{2}\left|\left|p^* - z^*\right|\right|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\left|\left|z^* - y^*\right|\right|^2_{L^2} + \\
&+ \int\limits_{\{u>\phi\}} (f + \operatorname{div} y^*)(\phi - u)\,\mathrm{dx} + \int\limits_{\{u>\phi\}} (\phi - u)\operatorname{div}(y^* - z^*)\,\mathrm{dx}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Обращаясь к тождеству, представленному в теореме 2.2, найдем оценку сверху для правой части (2.20):

$$\begin{aligned}
\mu(v) + \mu^*(y^*) &= \frac{1}{2}\left|\left|\nabla v - y^*\right|\right|^2_{L^2} + \int\limits_{\Omega} (f + \operatorname{div} y^*)(\phi - v)\,\mathrm{dx} \leq \\
&\leq \frac{(1+\beta)}{2}\left|\left|\nabla v - z^*\right|\right|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\left|\left|y^* - z^*\right|\right|^2_{L^2} + \\
&+ \int\limits_{\Omega} (f + \operatorname{div} z^*)(\phi - v)\,\mathrm{dx} + \int\limits_{\Omega} (\phi - v)\operatorname{div}(y^* - z^*)\,\mathrm{dx}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Полученные оценки снизу и сверху (2.24) и (2.25) соответственно также справедливы для любых функций $z^* \in H(\Omega, \operatorname{div})$. Объединяя их в одно выражение и приводя подобные слагаемые, получаем, что

$$\mu(v) + \mu^*(y^*) \leq \frac{1}{2}(1+\beta)\|\nabla v - z^*\|^2_{L^2} +$$
$$+ \int\limits_\Omega (f + \operatorname{div} z^*)(\phi - v)\,\mathrm{dx} + \frac{1}{\beta}\|y^* - z^*\|^2_{L^2} + \int\limits_\Omega (u-v)\operatorname{div}(y^* - z^*)\,\mathrm{dx}\,.$$

Применим к последнему слагаемому неравенства Гёльдера и Юнга с тем же параметром β:

$$\int\limits_\Omega (u-v)\operatorname{div}(y^* - z^*)\,\mathrm{dx} \leq \frac{\beta}{2}\|\nabla(v-u)\|^2_{L^2} + \frac{1}{2\beta}\|y^* - z^*\|^2_{L^2}\,.$$

Собирая вместе все соотношения, приходим к оценке, выполняющейся для любых функций $z^* \in H(\Omega, \operatorname{div})$.

Теорема 2.3. *Для любых функций $v \in \mathbb{K}$ и $z^* \in H(\Omega, \operatorname{div})$ полная мера отклонения этих функций от точных решений прямой и двойственной задач (u и p^* соответственно) удовлетворяет следующей оценке:*

$$\frac{1-\beta}{2}\|\nabla(v-u)\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\|p^* - z^*\|^2_{L^2} + \int\limits_{\{u=\phi\}} (f + \Delta u)(u-v)\,\mathrm{dx} +$$
$$+ \int\limits_{\{u>\phi\}} (f + \operatorname{div} z^*)(\phi - u)\,\mathrm{dx} \leq \mathfrak{M}(v, z^*, f, \phi, \beta)\,, \tag{2.26}$$

где

$$\mathfrak{M}(v, z^*, f, \phi, \beta) := \frac{1}{2}(1+\beta)\|\nabla v - z^*\|^2_{L^2} +$$
$$+ \int\limits_\Omega (f + \operatorname{div} z^*)(\phi - v)\,\mathrm{dx} + \frac{3}{2\beta}C_F^2\left\|(f + \operatorname{div} z^*)_+\right\|^2_{L^2}\,,$$

параметр $\beta \in (0,1]$, а C_F - константа из леммы 2.1.

3 Получение апостериорной оценки для эллиптической задачи с препятствием для оператора p-Лапласа

Для получения гарантированных оценок ошибок приближенного решения эллиптической задачи с препятствием для оператора p-Лапласа стоит обратить вначале внимание на определение данного оператора:

$$\Delta_p v := \operatorname{div}\left(|\nabla v|^{p-2}\nabla v\right),$$
$$|\nabla v|^{p-2} = \left[(v_{x_1})^2 + (v_{x_2})^2 + \dots + (v_{x_n})^2\right]^{\frac{p-2}{2}},$$
$$\int\limits_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla\psi \,\mathrm{dx} = 0 \text{ для любого } \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$ - ограниченная область, ϕ является функцией препятствия. Соответственно в вариационном виде постановка данной проблемы выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered} J[u] := \inf_{v\in\mathbb{K}} J[v], \\ J[v] = \int\limits_\Omega (\frac{1}{p}|\nabla v|^p - fv)\,\mathrm{dx}, \\ \mathbb{K} = \left\{v \in W_p^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0, v \geq \phi \text{ в } \Omega\right\}, \\ \phi \in C^{\max\{2,p\}}(\Omega), \phi \leq 0 \text{ на } \partial\Omega, \\ f \in L^q(\Omega), \quad q = \frac{p}{p-1}. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Замечание 3.1. *Теорема 2.1 верна для абстрактных G, F и Λ с общими свойствами, а также для абстрактных рефлексивных банаховых пространств V, Y, V^* и Y^*. Поэтому в гл. 3 мы определяем функционалы и пространства, соответствующие поставленной задачи с оператором p-Лапласа, по-другому.*

Функционал $J[v]$, как и в главе 2, можно представить в виде суммы двух функционалов

$$J[v] := G(\Lambda v) + F(v),$$

где

$$\Lambda : V \to Y,$$
$$V = \left\{ v \in W_p^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0 \right\} = W_0^{1,p},$$
$$Y = L^p(\Omega, \mathbb{R}^n),$$
$$\Lambda = \nabla.$$

Тогда функционал $G : Y \to \mathbb{R}$ имеет вид:

$$G(y) = \frac{1}{p} \int\limits_{\Omega} |y|^p \, \mathrm{dx} = \frac{1}{p} \, ||y||^p_{L^p},$$
$$G(\Lambda y) = \frac{1}{p} \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^p \, \mathrm{dx},$$

где $G(y) \geq 0$ для любого $y \in Y$, $G(y) = 0$ тогда и только тогда, когда $y = 0_Y$, и $G(y) \to \infty$ при $y \to +\infty$.

Функционал $F : V \to \mathbb{R}$ представляется в таком же виде, что и в модельной задаче (2.2):

$$F(v) = -\int\limits_{\Omega} f v \, \mathrm{dx} + \chi_{\mathbb{K}}(v), \text{ где } \chi_{\mathbb{K}}(v) = \begin{cases} 0, v \in \mathbb{K}, \\ +\infty, v \notin \mathbb{K}. \end{cases}$$

Теперь нам необходимо построить сопряженные пространства V^* и Y^*, а также функционалы G^* и F^*, двойственные к G и F соответственно, и определить оператор Λ^*:

$$V^* = W_0^{-1,q}, \text{ где } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$
$$Y^* = L^q(\Omega, \mathbb{R}^n),$$
$$G^*(y^*) = \frac{1}{q} \int\limits_{\Omega} |y^*|^q \, \mathrm{dx} = \frac{1}{q} \, ||y^*||^q_{L^q},$$
$$\Lambda^* : Y^* \to V^*, \ \Lambda^* = \operatorname{div}.$$

В свою очередь, функционал $F^*(-\Lambda^* y^*)$ определяется таким образом, что

$$F^*(-\Lambda^* y^*) = \sup_{v \in \mathbb{K}} \left\{ \int\limits_{\Omega} (f + \operatorname{div} y^*) \, v \, \mathrm{dx} \right\}.$$

Предположим, что функции y^* удовлетворяют условию

$$y^* \in H_q(\Omega, \operatorname{div}) := \{y \in Y^* : \operatorname{div} y^* \in L^q\}.$$

Рассматривая заданную функцию $\hat{v} \in \mathbb{K}$, а также функцию $w \in V^+(\Omega)$, где $V^+(\Omega) := \{w \in V(\Omega) : w \geq 0$ почти всюду в $\Omega\}$, сумма которых принадлежит множеству $\mathbb{K}$, приходим к оценке снизу функционала $F^*(-\Lambda^* y^*)$:

$$F^*(-\Lambda^* y^*) \geq \int\limits_\Omega (f + \operatorname{div} y^*)\, \hat{v}\, \mathrm{dx} + \sup_{w \in V^+(\Omega)} \left\{ \int\limits_\Omega (f + \operatorname{div} y^*)\, w\, \mathrm{dx} \right\}. \tag{3.2}$$

Повторяя рассуждения, представленные в главе 2, заключаем, что выражение (3.2) будет конечно в том и только том случае, если для $y^* \in H_q(\Omega, \operatorname{div})$ выполняется условие $f + \operatorname{div} y^* \leq 0$ почти всюду в Ω, то есть $y^* \in Q_{q,\leq 0}$, где

$$Q_{q,\leq 0} = \{y^* \in H_q(\Omega, \operatorname{div}) : f + \operatorname{div} y^* \leq 0 \text{ почти всюду в } \Omega\}. \tag{3.3}$$

Возьмем последовательность функций $v_k \in \mathbb{K}$, сходящуюся к функции препятствия ϕ в L^p, и получим явное представление функционала

$$F^*(-\Lambda^* y^*) = \int\limits_\Omega (f + \operatorname{div} y^*)\, \phi\, \mathrm{dx}. \tag{3.4}$$

Значит, для всех функций $y^* \in Q_{q,\leq 0}$ верно $\langle \Lambda^* y^*, v \rangle = -\int\limits_\Omega \operatorname{div} y^* \cdot v\, \mathrm{dx}$, и мы можем перейти к определению функционалов $\mathcal{D}_G$ и $\mathcal{D}_F$ из теоремы 2.1.

Таким образом, подставляя полученные выражения в формулы (2.9) и (2.10), для $\mathcal{D}_G$ находим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_G(\Lambda u, y^*) &= \frac{1}{p} \int\limits_\Omega |\nabla u|^p\, \mathrm{dx} + \frac{1}{q} \int\limits_\Omega |y^*|^q\, \mathrm{dx} - (y^*, \Lambda u) = \\ &= \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{p} |\nabla u|^p + \frac{1}{q} |y^*|^q - \nabla u \cdot y^* \right) \mathrm{dx}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

и по аналогии

$$\mathcal{D}_G(\Lambda v, p^*) = \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{p} |\nabla v|^p + \frac{1}{q} |p^*|^q - \nabla v \cdot p^* \right) \mathrm{dx}, \tag{3.6}$$

$$\mathcal{D}_G(\Lambda v, y^*) = \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{p} |\nabla v|^p + \frac{1}{q} |y^*|^q - \nabla v \cdot y^* \right) \mathrm{dx}\,. \tag{3.7}$$

Исходя из того условия, что $y^* \in Q_{q,\leq 0}$, мы также можем определить функционалы

$$\mathcal{D}_F(v, -\Lambda^* y^*) = \int\limits_\Omega (f + \operatorname{div} y^*)(\phi - v)\,\mathrm{dx} \tag{3.8}$$

и

$$\mathcal{D}_F(u, -\Lambda^* y^*) = \int\limits_\Omega (f + \operatorname{div} y^*)(\phi - u)\,\mathrm{dx}, \tag{3.9}$$

однако для нахождения $\mathcal{D}_F(v, -\Lambda^* p^*)$ нам необходимо провести рассуждения, аналогичные представленным ранее. Полагая $u = v$, заключаем, что

$$\mathcal{D}_F(u, -\Lambda^* p^*) = 0,$$

откуда следует

$$F^*(-\Lambda^* p^*) = -F(u) - \langle \Lambda^* p^*, u \rangle = \int\limits_\Omega f u\,\mathrm{dx} + \int\limits_\Omega \operatorname{div} p^* \cdot u\,\mathrm{dx}\,.$$

Значит, $\langle \Lambda^* p^*, v \rangle = -\int\limits_\Omega \operatorname{div} p^* \cdot v\,\mathrm{dx}$, и тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_F(v, -\Lambda^* p^*) = -\int\limits_\Omega f v\,\mathrm{dx} + \int\limits_\Omega f u\,\mathrm{dx} + \int\limits_\Omega \operatorname{div} p^* \cdot u\,\mathrm{dx} - \\ -\int\limits_\Omega \operatorname{div} p^* \cdot v\,\mathrm{dx} = \int\limits_\Omega (f + \operatorname{div} p^*)(u - v)\,\mathrm{dx}\,. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Заметим, что точные решения прямой и двойственной задач u и p^* соответственно связаны друг с другом так, что $p^* = \nabla u\,|\nabla u|^{p-2}$ и $|\nabla u|^p = |p^*|^q$. Тогда, поскольку

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega (f + \operatorname{div} p^*)(u - v)\,\mathrm{dx} &= \int\limits_{\{u=\phi\}} \left(f + \operatorname{div}\left(\nabla u\,|\nabla u|^{p-2} \right) \right)(u - v)\,\mathrm{dx} = \\ &= \int\limits_{\{u=\phi\}} (f + \Delta_p u)(u - v)\,\mathrm{dx} \end{aligned}$$

и

$$\int\limits_\Omega (f + \operatorname{div} y^*)(\phi - u)\,\mathrm{dx} = \int\limits_{\{u>\phi\}} (f + \operatorname{div} y^*)(\phi - u)\,\mathrm{dx},$$

пользуясь условием связи прямой и двойственной задач, мы можем получить выражения, стоящие в левой части тождества теоремы 2.1. Итак,

$$\begin{gathered}\mu(v) = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{p}|\nabla v|^p + \frac{1}{q}|\nabla u|^p - \nabla v \nabla u\, |\nabla u|^{p-2}\right) \mathrm{dx} + \\ + \int\limits_{\{u=\phi\}} (f + \Delta_p u)(u - v)\, \mathrm{dx},\end{gathered} \tag{3.11}$$

$$\begin{gathered}\mu^*(y^*) = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{p}|p^*|^q + \frac{1}{q}|y^*|^q - \gamma(x)\, p^* y^*\right) \mathrm{dx} + \\ + \int\limits_{\{u>\phi\}} (f + \operatorname{div} y^*)(\phi - u)\, \mathrm{dx},\end{gathered} \tag{3.12}$$

где

$$\gamma(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \in \Omega \cap \{|\nabla u| = 0\}, \\ |p^*|^{\frac{2-p}{p-1}}, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Теорема 3.1. *Для любых функций $v \in \mathbb{K}$ и $y^* \in Q_{q,\leq 0}$ полная мера отклонения этих функций от точных решений прямой и двойственной задач (u и p^* соответственно) удовлетворяет следующему тождеству:*

$$\begin{gathered}\mu(v) + \mu^*(y^*) = \\ = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{p}|\nabla v|^p + \frac{1}{q}|y^*|^q - \nabla v \cdot y^*\right) \mathrm{dx} + \int\limits_{\Omega} (f + \operatorname{div} y^*)(\phi - v)\, \mathrm{dx},\end{gathered} \tag{3.13}$$

где левая часть равенства определяется формулами (3.11) и (3.12).

Замечание 3.2. *Выражения $\mu(v)$ и $\mu^*(y^*)$ являются неотрицательными величинами, обращающимися в ноль при равенствах точных и приближенных решений в прямой и двойственной задачах соответственно: $u = v$ и $p^* = y^*$. Кроме того, все составляющие в $\mu(v)$ и $\mu^*(y^*)$ неотрицательны. Также стоит отметить, что выражение, стоящее в правой части тождества этой теоремы является полностью вычисляемым.*

Теперь покажем, как можно расширить допустимое множество $Q_{q,\leq 0}$ для функции y^*.

Суперквадратичный случай: $p \geq 2$.

Лемма 3.1. *Для любой функции* $z^* \in H_q(\Omega, \mathrm{div})$ *выполняется проекционное неравенство:*

$$\inf_{y^* \in Q_{q,\leq 0}} ||z^* - y^*||^q_{L_q} \leq C_F^q \left|\left|(f + \mathrm{div}\, z^*)_+\right|\right|^q_{L_q}, \tag{3.14}$$

где C_F *- константа из неравенства типа Фридрихса:*

$$||w||_{L^p} \leq C_F ||\nabla w||_{L^p}, \tag{3.15}$$

а множество $Q_{q,\leq 0}$ *определено в (3.3).*

Доказательство. Для любой функции $z^* \in H_q(\Omega, \mathrm{div})$ оценим

$$\begin{aligned} \inf_{y^* \in Q_{q,\leq 0}} \frac{1}{q} ||y^* - z^*||^q_{L^q} &= - \sup_{y^* \in Q_{q,\leq 0}} \left[-\frac{1}{q} ||y^* - z^*||^q_{L^q} \right] \leq \\ &\leq - \sup_{y^* \in Y^*} \left[-\frac{1}{q} ||y^* - z^*||^q_{L^q} \right] = \\ &= - \inf_{w \in V(\Omega)} \int_\Omega \left(\frac{1}{p} |\nabla w|^p - (f + \mathrm{div}\, z^*)\, w \right) \mathrm{dx}, \end{aligned} \tag{3.16}$$

где последний переход сделан по свойству двойственности задачи минимизации p-Лапласа (без препятствия).

Заметим, что с помощью неравенства Гёльдера и неравенства (3.15) мы получаем:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\frac{1}{p} |\nabla w|^p - (f + \mathrm{div}\, z^*)\, w \right) \mathrm{dx} &\geq \frac{1}{p} ||\nabla w||^p_{L^p} - \left|\left|(f + \mathrm{div}\, z^*)_+\right|\right|_{L^q} ||w||_{L^p} \geq \\ &\geq \frac{1}{p} ||\nabla w||^p_{L^p} - C_F \left|\left|(f + \mathrm{div}\, z^*)_+\right|\right|_{L^q} ||\nabla w||_{L^p} \geq \\ &\geq \inf_{t \geq 0} \left(\frac{1}{p} t^p - C_F \left|\left|(f + \mathrm{div}\, z^*)_+\right|\right|_{L^q} \cdot t \right). \end{aligned}$$

Последнее выражение достигает inf при $t_0 = \left(C_F \left|\left|(f + \mathrm{div}\, z^*)_+\right|\right|_{L^q} \right)^{\frac{1}{p-1}}$. Это получается из тех рассуждений, что

$$P(t) = \frac{1}{p} t^p - Bt, \text{ где } B := C_F \left|\left|(f + \mathrm{div}\, z^*)_+\right|\right|_{L^q},$$

$$P'(t) = t^{p-1} - B = 0, \; p - 1 \geq 1.$$

Следовательно, $t_0 = B^{\frac{1}{p-1}}$ и, значит,

$$P\left(t_0\right) = \frac{1}{p} B^{\frac{p}{p-1}} - B \cdot B^{\frac{1}{p-1}} = \frac{1}{p} B^{\frac{p}{p-1}} - B^{1+\frac{1}{p-1}} = \left(\frac{1}{p} - 1\right) B^{\frac{p}{p-1}} = -\frac{1}{q} \cdot B^q.$$

Таким образом,

$$\int\limits_\Omega \left(\frac{1}{p}\left|\nabla w\right|^p - \left(f + \operatorname{div} z^*\right) w\right) \mathrm{dx} \geq -\frac{1}{q} C_F^q \left|\left|\left(f + \operatorname{div} z^*\right)_+\right|\right|_{L^q}^q. \qquad (3.17)$$

Объединяя выражения (3.16) и (3.17), получаем необходимое утверждение (3.14). ☐

Таким образом, мы получили основное тождество ошибки отклонения приближенного решения от точного для всех допустимых значений параметра $p > 1$ и неравенство (3.14) для суперквадратичного случая ($p \geq 2$), позволяющее оценить норму разности функций z^* и y^*. Однако встает вопрос: можно ли представить разность точного и приближенного решений прямой задачи в виде неравенства?

Для любых функций $\nabla u \in L^p\left(\Omega, \mathbb{R}^n\right)$ и $\nabla v \in L^p\left(\Omega, \mathbb{R}^n\right)$ из поставленной задачи будет справедливо первое неравенство Кларксона [14]:

$$\int\limits_\Omega \left|\frac{\nabla\left(u+v\right)}{2}\right|^p \mathrm{dx} + \int\limits_\Omega \left|\frac{\nabla\left(u-v\right)}{2}\right|^p \mathrm{dx} \leq \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \left|\nabla u\right|^p \mathrm{dx} + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \left|\nabla v\right|^p \mathrm{dx}.$$

Умножив обе части неравенства на 2^p и оставив в его левой части выражение с разностью приближенного и точного решений, получим следующее:

$$\int\limits_\Omega \left|\nabla\left(u-v\right)\right|^p \mathrm{dx} \leq$$

$$\leq 2^{p-1} p \left(\frac{1}{p}\int\limits_\Omega \left|\nabla u\right|^p \mathrm{dx} + \frac{1}{p}\int\limits_\Omega \left|\nabla v\right|^p \mathrm{dx} - \frac{2}{p}\int\limits_\Omega \left|\frac{\nabla\left(u+v\right)}{2}\right|^p \mathrm{dx}\right)$$

В свою очередь, правая часть последнего неравенства есть ни что иное, как сумма функционалов $J\left[u\right]$, $J\left[v\right]$ и $-2J\left[\frac{u+v}{2}\right]$. Поскольку u является точным решением поставленной задачи, то $J\left[u\right] \leq J\left[\frac{u+v}{2}\right]$, то есть

$$J\left[u\right] + J\left[v\right] - 2J\left[\frac{u+v}{2}\right] \leq J\left[u\right] + J\left[v\right] - 2J\left[u\right] = J\left[v\right] - J\left[u\right],$$

и таким образом, для случая $p \geq 2$ мы получаем следующую оценку:

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla (u - v)|^p \, \mathrm{dx} \leq 2^{p-1} p \left(J[v] - J[u] \right). \tag{3.18}$$

Итак, из соотношения двойственности поставленной вариационной задачи, а именно из равенства $J[u] = I[p^*]$, для получения основного тождества ошибки мы представляли разность $J[v] - J[u]$ в виде составных функционалов, равных мере отклонения $\mu(v)$. Отсюда с использованием результата применения неравенства Кларксона (3.18) мы можем получить оценку для меры $\mu(v)$ снизу. Для любых функций $\nabla u, \nabla v \in L^p(\Omega)$ будет выполняться неравенство:

$$\mu(v) \geq \frac{1}{2^{p-1} p} ||\nabla (u - v)||^p_{L^p}. \tag{3.19}$$

Получим теперь оценку снизу для меры $\mu^*(y^*)$. Для любой функции $z^* \in H_q(\Omega, \mathrm{div})$

$$\begin{aligned} \mu^*(y^*) \geq & \int\limits_{\{u>\phi\}} \left(f + \operatorname{div} y^* \right)(\phi - u) \, \mathrm{dx} = \\ = & \int\limits_{\{u>\phi\}} \left(f + \operatorname{div}(z^* + y^* - z^*) \right)(\phi - u) \, \mathrm{dx} = \\ = & \int\limits_{\{u>\phi\}} \left(f + \operatorname{div} z^* \right)(\phi - u) \, \mathrm{dx} + \int\limits_{\{u>\phi\}} \operatorname{div}(y^* - z^*)(\phi - u) \, \mathrm{dx}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Следовательно, подставляя полученные оценки (3.19) и (3.20) в тождество (3.13), заключаем, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^{p-1} p} ||\nabla (u - v)||^p_{L^p} + \int\limits_{\{u>\phi\}} \left(f + \operatorname{div} z^* \right)(\phi - u) \, \mathrm{dx} \leq \\ \leq & \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{p} |\nabla v|^p + \frac{1}{q} |y^*|^q - \nabla v \cdot y^* \right) \mathrm{dx} + \int\limits_{\Omega} \left(f + \operatorname{div} y^* \right)(\phi - v) \, \mathrm{dx} - \\ & - \int\limits_{\{u>\phi\}} \operatorname{div}(y^* - z^*)(\phi - u) \, \mathrm{dx}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Оценим первое слагаемое, стоящее в правой части получившегося неравенства (3.21):

$$
\begin{gathered}
\int\limits_\Omega \left(\frac{1}{p}\left|\nabla v\right|^p + \frac{1}{q}\left|y^*\right|^q - \nabla v \cdot y^*\right)\mathrm{dx} \leq \\
\leq \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{p}\left|\nabla v\right|^p + \frac{1}{q}\left|y^*\right|^q + \left|\nabla v\right| \cdot \left|y^*\right|\right)\mathrm{dx} \leq \\
\leq 2\int\limits_\Omega \left(\frac{1}{p}\left|\nabla v\right|^p + \frac{1}{q}\left|y^*\right|^q\right)\mathrm{dx},
\end{gathered}
\tag{3.22}
$$

где такой переход в последнем неравенстве сделан с применением общего неравенства Юнга к последнему интегральному слагаемому. Кроме того, $\forall z^* \in H_q\left(\Omega, \mathrm{div}\right)$

$$
\begin{gathered}
\int\limits_\Omega \frac{1}{q}\left|y^*\right|^q \mathrm{dx} = \frac{1}{q}\left|\left|y^*\right|\right|^q_{L^q} = \frac{1}{q}\left|\left|y^* - z^* + z^*\right|\right|^q_{L^q} \leq \\
\leq \frac{1}{q}\left(\left|\left|y^* - z^*\right|\right|_{L^q} + \left|\left|z^*\right|\right|_{L^q}\right)^q \leq \frac{2^{q-1}}{q}\left(\left|\left|y^* - z^*\right|\right|^q_{L^q} + \left|\left|z^*\right|\right|^q_{L^q}\right) \leq \\
\leq \frac{2^{q-1}}{q} C_F^q \left|\left|\left(f + \mathrm{div}\, z^*\right)_+\right|\right|^q_{L^q} + \frac{2^{q-1}}{q}\left|\left|z^*\right|\right|^q_{L^q}.
\end{gathered}
\tag{3.23}
$$

Представим теперь второе слагаемое, стоящее в правой части неравенства (3.21), через функции $z^* \in H_q\left(\Omega, \mathrm{div}\right)$:

$$
\begin{gathered}
\int\limits_\Omega \left(f + \mathrm{div}\, y^*\right)\left(\phi - v\right)\mathrm{dx} = \int\limits_\Omega \left[f + \mathrm{div}\left(y^* - z^* + z^*\right)\right]\left(\phi - v\right)\mathrm{dx} = \\
= \int\limits_\Omega \left(f + \mathrm{div}\, z^*\right)\left(\phi - v\right)\mathrm{dx} + \int\limits_\Omega \mathrm{div}\left(y^* - z^*\right)\left(\phi - v\right)\mathrm{dx}.
\end{gathered}
$$

Следовательно, интегрируя по частям, используя неравенства Гёльдера и Коши с достаточно малым параметром ε, а также проекционное неравенство (3.15), мы получаем следующую оценку:

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{\Omega} \operatorname{div}\left(y^*-z^*\right)(\phi-v)\,\mathrm{dx}-\int\limits_{\{u>\phi\}} \operatorname{div}\left(y^*-z^*\right)(\phi-v)\,\mathrm{dx}= \\
=\int\limits_{\Omega} \operatorname{div}\left(y^*-z^*\right)(u-v)\,\mathrm{dx}=\int\limits_{\Omega}\left(z^*-y^*\right)\nabla(u-v)\,\mathrm{dx} \leq \\
\leq \int\limits_{\Omega}\left|z^*-y^*\right| \cdot|\nabla(u-v)|\,\mathrm{dx} \leq \\
\leq\left(\int\limits_{\Omega}\left|z^*-y^*\right|^q \mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{q}} \cdot\left(\int\limits_{\Omega}|\nabla(u-v)|^p \mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \\
\leq \frac{\varepsilon}{p}\,||\nabla(u-v)||_{L^p}^p+\frac{1}{q \varepsilon^{\frac{p}{q}}}\,\left|\left|z^*-y^*\right|\right|_{L^q}^q \leq \\
\leq \frac{\varepsilon}{p}\,||\nabla(u-v)||_{L^p}^p+\frac{C_F^q}{q \varepsilon^{\frac{p}{q}}}\,\left|\left|\left(f+\operatorname{div} z^*\right)_{+}\right|\right|_{L^q}^q .
\end{gathered} \tag{3.24}
$$

Объединяя все полученные оценки (3.19) - (3.24) и приводя подобные слагаемые, мы заключаем, что искомая оценка отклонения приближенного решения от точного в поставленной задаче удовлетворяет следующей теореме.

Теорема 3.2. *Для любых функций $v \in \mathbb{K}$ и $z^* \in H_q(\Omega, \operatorname{div})$ и параметра $p \geq 2$ полная мера отклонения этих функций от точных решений прямой и двойственной задач соответственно удовлетворяет следующему неравенству:*

$$
\frac{\left(1-2^{p-1}\varepsilon\right)}{2^{p-1}p}\,||\nabla(u-v)||_{L^p}^p+\int\limits_{\{u>\phi\}}\left(f+\operatorname{div} z^*\right)(\phi-u)\,\mathrm{dx} \leq \mathfrak{M}\left(v, z^*, f, \phi, \varepsilon\right)
$$

где

$$
\begin{gathered}
\mathfrak{M}\left(v, z^*, f, \phi, \varepsilon\right):=\frac{2}{p}\,||\nabla v||_{L^p}^p+\frac{2^q}{q}\,\left|\left|z^*\right|\right|_{L^q}^q+\int\limits_{\Omega}\left(f+\operatorname{div} z^*\right)(\phi-v)\,\mathrm{dx}+ \\
+\frac{C_F^q\left(1+2^q \varepsilon^{\frac{p}{q}}\right)}{q \varepsilon^{\frac{p}{q}}}\,\left|\left|\left(f+\operatorname{div} z^*\right)_{+}\right|\right|_{L^q}^q ,
\end{gathered}
$$

C_F - константа из леммы 3.1.

Субкритический случай: $1 < p < 2$.

Замечание 3.3. *Этот случай существенно отличается от приведенных выше соображений. Здесь невозможно (без априорных оценок точного решения прямой задачи* u*) найти естественную верхнюю границу для нормы* $||\nabla (v-u)||_{L^p}$*. Причиной этого является отсутствие равномерной сходимости на бесконечности. Для преодоления этой трудности мы должны будем перейти к двойственной задаче и получить оценки для* $||p^* - y^*||_{L^q}$*.*

4 Заключение

В данной работе в соответствии с общей теорией для выпуклых вариационных задач была найдена оценка ошибки отклонения приближенного решения от точного в эллиптической задаче с препятствием для оператора p-Лапласа Δ_p в ограниченной области пространства $\mathbb{R}^n$. Эта ошибка измеряется в терминах естественной энергетической нормы.

На основе общей теории двойственности было получено тождество, позволяющее представить полную меру ошибки отклонения через полностью вычисляемое выражение, зависящее от известных или вычисляемых величин. Благодаря этому тождеству, верному при любых аппроксимациях прямой переменной, но содержащему ограничения на двойственные, мы оценили качество приближенного решения, не зная при этом точного.

Далее, получив расширение допустимого множества для приближенных решений сопряженной задачи, то есть сняв ограничения на эти функции, мы перешли от тождества к неравенству. Таким образом, эта оценка выполняется для любых аппроксимаций и прямой, и двойственной задачи, а соответствующая мажоранта представляется в виде известных и полностью вычисляемых выражений.

Список литературы

[1] Lee, K., & Shahgholian, H. (2003). Hausdorff measure and stability for the p-obstacle problem ($2 < p < \infty$). *Journal of Differential Equations, 195*(1), 14-24.

[2] Lions, J.-L., & Stampacchia, G. (1967). Variational Inequalities. *Communications on Pure and Applied Mathematics, 20*, 493-519.

[3] Lindqvist, P. (2006). Notes on the p-Laplace equation.

[4] Choe, H., & Lewis J.L. (1991). On the obstacle problem for quasilinear elliptic equations of p Laplacian type. *Siam Journal on Mathematical Analysis, 22*, 623-638.

[5] Andersson, J., Lindgren, E.A., & Shahgholian, H. (2014). Optimal regularity for the obstacle problem for the p-Laplacian. *Journal of Differential Equations, 259*, 2167-2179.

[6] Lundstrom, N.L. (2011). p-harmonic functions near the boundary. [Doctoral dissertation, Umeå University].

[7] Capitanelli, R., & Vivaldi, M. A. (2020). Limit of p-Laplacian obstacle problems. *Advances in Calculus of Variations, 15*(2), 265-286.

[8] Figalli, A., Krummel, B., & Ros-Oton, X. (2017). On the regularity of the free boundary in the p-Laplacian obstacle problem. *Journal of Differential Equations, 263*(3), 1931-1945.

[9] Апушкинская, Д.Е., & Репин, С.И. (2020). Бигармоническая задача с препятствием: Гарантированные и вычисляемые оценки ошибок для приближенных решений. *Журнал вычислительной математики и математической физики, 60*(11), 1881-1897.

[10] Репин, С.И., & Фролов, М.Е. (2002). Об апостериорных оценках точности приближенных решений краевых задач для уравнений эллиптического типа. *Журнал вычислительной математики и математической физики, 42*(12), 1774-1787.

[11] Repin, S.I. (2003). Estimates of Deviations from Exact Solutions of Elliptic Variational Inequalities. *Journal of Mathematical Sciences, 115*, 2811-2819.

[12] Apushkinskaya, D.E., & Repin, S.I. (2018). Thin obstacle problem: Estimates of the distance to the exact solution. *Interfaces and Free Boundaries 20*(4), 511-531.

[13] Repin, S. I. (2003). Two-sided estimates of deviation from exact solutions of uniformly elliptic equations. *Translations of the American Mathematical Society-Series 2, 209*, 143-172.

[14] Соболев, С.Л. (1988). *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* М.: Наука.