МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра: Математический институт им. С.М. Никольского

«Допустить к защите»
Директор Математического института им. С.М. Никольского
А. Б.Муравник
«___» ________ 2022 г.

Выпускная квалификационная работа бакалавра на тему

"Интегральные формулы объёмов неевклидовых многогранников специального вида"

Направление 01.03.01 – "Математика"

Выполнил:
Студент группы НМТбд-01-18
Студенческий билет №: 1032181487
Т. Р. Хайруллин
«___» ________ 2022 г.

Руководитель:
доцент , к.ф.-м.н.
В. А. Краснов
«___» ________ 2022 г.

Москва

2022 г.

Содержание

Введение

Вопрос нахождения объёмов фигур в трёхмерном евклидовом пространстве является одним из древнейших. В курсе школьной геометрии проходят формулу Герона, выражающую площадь треугольника через длины его стороны.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c - длины сторон треугольника, а $p = \frac{a+b+c}{2}$ - полупериметр.

К сожалению, она не может быть перенесена на многоугольники более сложного вида, так как, например, квадрат можно непрерывно деформировать, превратив его в ромб, имеющий меньшую площадь. В каком-то смысле, треугольник является "жёсткой"фигурой.

Существует также формула, выражающая объём евклидова тетраэдра через длины его сторон. Открыл её, по-видимому, Пьеро делла Франческа, знаменитый итальянский художник эпохи раннего Возрождения. Формула носит имя Тартальи и имеет следующий вид:

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ 1 & d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ 1 & d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ 1 & d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 \end{vmatrix},$$

где d_{ij}^2 - квадрат длины ребра, соединяющего i-ю и j-ю вершины.

Поскольку треугольники на плоскости и тетраэдры в пространстве однозначно определены через длины своих стороны, приведённые выше формулы утверждают инвариантность площади и объёма относительно движений соответствующих пространств, что соответствует их интуитивному пониманию.

В гиперболическом и сферическом пространствах размерности три тетраэдры однозначно определяются своими двугранными углами. Возникает интерес найти формулы, выражающие их объёмы через величины этих углов.

Существует недоказанная гипотеза [1], которая гласит, что любой симплекс можно разбить на ортосхемы, количество которых ограничено сверху функцией от размерности симплекса. В случае трёхмерного пространства эта гипотеза верна, и тогда наш поиск сводится к нахождению формул, выражающих объёмы ортосхем через величины их двугранных углов, чему и будет посвящена настоящая работа.

Известные на данный момент формулы, решающие задачу вычисления объёмов сферических тетраэдров, либо слишком громоздкие (формула Кокстера), либо выражены через интеграл от комплекснозначной функции (формула Сфорца), и их применение оказывается весьма неудобным. В данной работе будут получены альтернативные формулы объёма сферической ортосхемы через двугранные углы.

Глава 1. Определения, обозначения и понятия

Введём обозначения, определения и понятия, которые мы будем использовать в данной работе.

Рассматривается задача вычисления объёмов многогранников в сферическом пространстве $\mathbb{S}^3$. Определим его следующим образом:

$$\mathbb{S}^3 = \left\{ x \in \mathbb{E}^4 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \right\}$$

Плоскости, прямые и точки в $\mathbb{S}^3$ определим как пересечение его с линейными подпространствами $\mathbb{E}^4$ коразмерности один, два и три соответственно. В частности, плоскости $H_e \subset \mathbb{S}^3$ определим таким образом:

$$H_e = \left\{ x \in \mathbb{S}^3 \,\middle|\, (x, e) = 0 \right\}, \tag{1.1}$$

где e - единичный вектор нормали к H_e.

Угол между пересекающимися плоскостями H_e и H_p с нормальными векторами e и p будем вычислять по формуле:

$$cos\left(\widehat{H_e, H_p}\right) = -(e, p). \tag{1.2}$$

Тэтраэдром $T \subset \mathbb{S}^3$ назовём пересечение некоторого замкнутого симплициального конуса $K \subset \mathbb{E}^4$ с пространством $\mathbb{S}^3$.

Поскольку базис в $\mathbb{E}^4$ определён своей матрицей Грама однозначно с точностью до ортогонального преобразования, то из формулы (1.2) следует, что тетраэдр $T \subset \mathbb{S}^3$ определён с точностью до движения своими двугранными углами.

Глава 2. Предварительные результаты

Пусть T - тетраэдр в $\mathbb{S}^3$ с двугранными углами A, B, C, D, E, F, углы A, B, C принадлежат рёбрам с общей вершиной, а углы D, E, F противолежат им, соответственно.

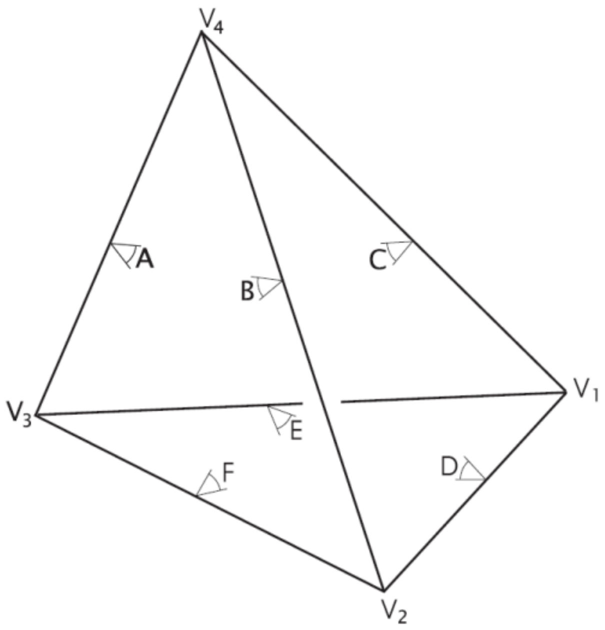

Рис. 1: Тетраэдр T с двугранными углами A, B, C, D, E, F

Введём матрицу Грама тетраэдра $T = T(A, B, C, D, E, F)$:

$$G = \langle -cos\alpha_{ij} \rangle_{i,j=1,2,3,4} = \begin{pmatrix} 1 & -cos\,A & -cos\,B & -cos\,F \\ -cos\,A & 1 & -cos\,C & -cos\,E \\ -cos\,B & -cos\,C & 1 & -cos\,D \\ -cos\,F & -cos\,E & -cos\,D & 1 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Символами c_{ij} будем обозначать элементы присоединённой матрицы:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

где M_{ij} - ij-й минор матрицы Грама G.

Лемма 2.1. [2] *Пусть T - сферический тетраэдр. Тогда для матрицы Грама G и символов c_{ij} верны следующие соотношения:*

$$det\, G > 0$$
$$c_{ii} > 0$$
$$cos\, l_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}},$$

где l_{ij} - длина ребра, соединяющего i-ю и j-ю вершины, $i, j = \overline{1,4}$, $i \neq j$.

Для вычисления объёмов ортосхем будет применять формулу Шлефли дифференциала объёма. В общем виде она формулируется для выпуклых многогранников в пространств постоянной кривизны.

Теорема 1. [3] *Пусть P - выпуклый многогранник в пространстве $\mathbb{S}^3$. Если он непрерывно деформируется в пространстве, не изменяя своего комбинаторного типа, а его двугранные углы изменяются дифференцируемым образом, то и объём $V = V(P)$ также изменяется дифференцируемым образом, причём*

$$dV = \frac{1}{2}\sum_i l_i\, d\alpha_i, \tag{2.2}$$

где l_i - длина i-го ребра многогранника, $d\alpha_i$ - дифференциал двугранного угла при i-м ребре, а суммирование ведётся по всем рёбрам многогранника P.

Также нам будет необходим критерий существования сферического тетраэдра:

Теорема 2. [2] *Для того, чтобы тетраэдр T был сферическим, необходима и достаточна положительная определённость его матрицы Грама.*

Приведём ещё формулу Сфорца

Теорема 3. *(Sforza, 1906 г.). Пусть T - произвольный тетраэдр в $\mathbb{S}^3$ с матрицей Грама G. Будем рассматривать $det\, G = det\, G(A)$ как функцию от двугранного угла A. Тогда объём тетраэдра $V = V(T)$ задаётся формулой:*

$$V = \frac{1}{4}\int\limits_{A_0}^{A} ln\frac{c_{34} - i\sqrt{det\, G(A)}sin(A)}{c_{34} + i\sqrt{det\, G(A)}sin(A)}dA,$$

где A_0 - подходящее решение уравнения $det\, G(A) = 0$, а $c_{34} = c_{34}(A)$ - алгебраическое дополнение к элементу $(3,4)$ матрицы $G(A)$.

Схема доказательства этой формулы состоит в следующем: рассматриваем непрерывную деформацию тетраэдра T, при которой меняется угол A, при этом остальные углы остаются постоянными и, используя формулу Шлефли и свойства матрицы Грама, выражаем дифференциал объёма при такой деформации. Далее, ищем угол A_0, разрешая уравнение $det\, G(A) = 0$ относительно A. После этого интегрируем дифференциал объёма в пределах от угла A_0 до A. Эта схема была получена Н.В. Абросимовым и А.Д. Медных в их обзоре [4].

Глава 3. Вычисление объёма сферической ортосхемы.

Определение 3.1. *Ортосхемой в трёхмерном пространстве называется симплекс, имеющий последовательность взаимно перпендикулярных рёбер* (v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3).

Замечание. Некоторые авторы используют название *бипрямоугольная пирамида.*

Из определения следует, что три из шести двугранных углов ортосхемы прямые. Другие три угла будем обозначать буквами α, β и γ и называть их *существенными углами тетраэдра.*

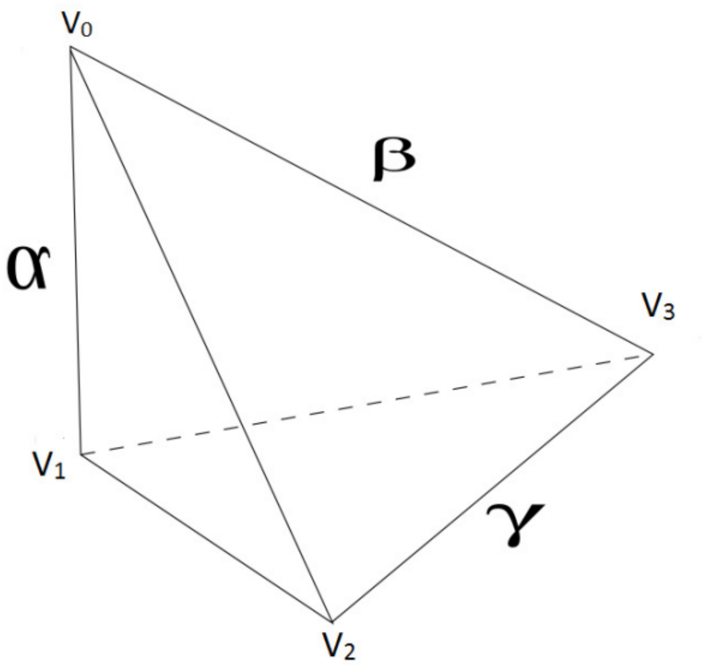

Рис. 2: Ортосхема T и существенные углы α, β, γ

Матрица Грама ортосхемы $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$ тогда примет вид:

$$G = \langle -cos\alpha_{ij} \rangle_{i,j=1,2,3,4} = \begin{pmatrix} 1 & -cos\,\alpha & 0 & 0 \\ -cos\,\alpha & 1 & -cos\,\beta & 0 \\ 0 & -cos\,\beta & 1 & -cos\,\gamma \\ 0 & 0 & -cos\,\gamma & 1 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Важность ортосхем обусловлена гипотезой Гуго Хадвигера [1], которая заключается в том, что любой симплекс в n-мерном пространстве может быть разбит на объединение ортосхем. В трёхмерном случае гипотеза верна, и объём тетраэдра может быть вычислен как алгебраическая сумма объёмов ортосхем его разбиения.

Отметим, что ранее известные формулы об объёме гиперболической бипрямоугольной пирамиды могут быть перенесены на сферический случай, однако они слишком громоздкие. Так, например, формула Лобачевского-Винберга-Келлерхальц состоит из восьми слагаемых, каждое из которых - значение функции Милнора, которая выражается через *неберущийся интеграл.*

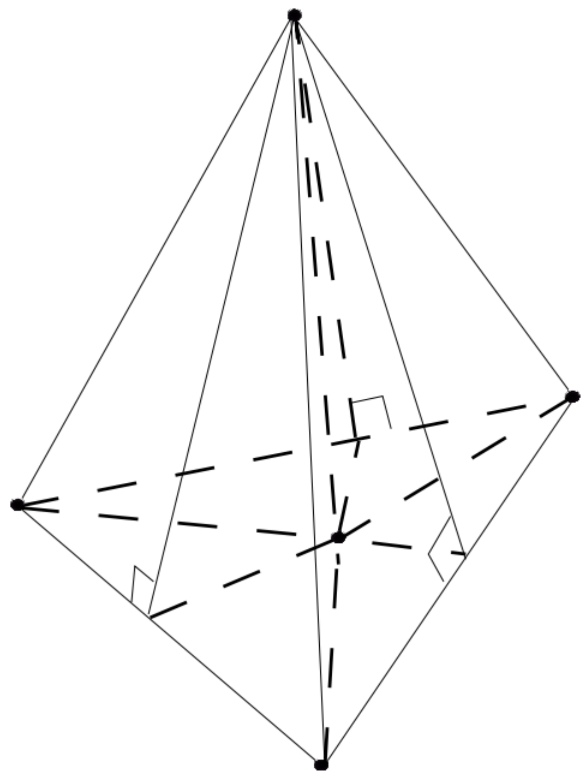

Рис. 3: Разбиение тетраэдра на ортосхемы в трёхмерном пространстве

Поставим задачу получения формул объёма сферической ортосхемы, используя схему доказательства формулы Сфорца.

Зафиксируем углы β и γ и рассмотрим непрерывную деформацию ортосхемы T, при которой будет изменяться только один двугранный угол α.

Отметим, что при такой деформации прямые углы не меняются. Используя формулу Шлефли, получаем

$$dV = \frac{1}{2} l_\alpha d\alpha, \tag{3.2}$$

где l_α - длина ребра двугранного угла α.

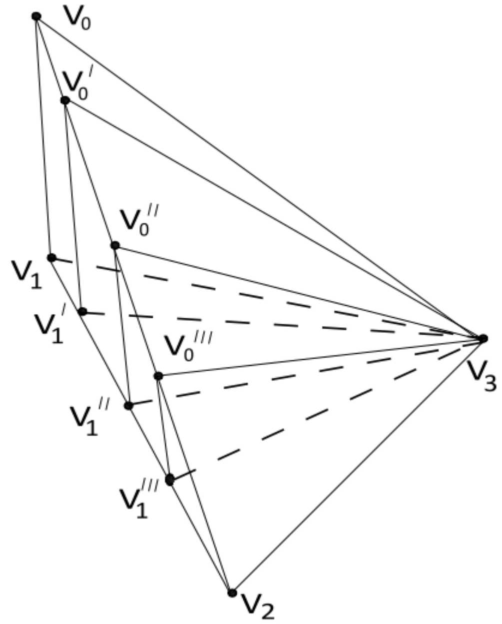

Рис. 4: Деформация ортосхемы

Из третьего соотношения леммы (2.1), получаем выражение для l_α:

$$l_\alpha = arccos \frac{cos\,\gamma\; sin\,\alpha}{\sqrt{1 - cos^2\beta - cos^2\alpha}} \tag{3.3}$$

Теперь найдём пределы, в которых может меняться наш угол α, используя критерий существования сферического тетраэдра (2)

$$\begin{cases} sin^2\alpha - cos^2\beta > 0 \\ sin^2\alpha \cdot sin^2\gamma - cos^2\beta > 0 \end{cases}$$

Из полученных неравенств находим интересующие нас пределы:

$$arcsin\left|\frac{cos\,\beta}{sin\,\gamma}\right| < \alpha < \pi - arcsin\left|\frac{cos\,\beta}{sin\,\gamma}\right|$$

Подставляя в формулу (3.2) соотношение (3.3) и интегрируя её в пределах от $arcsin\left|\frac{cos\,\beta}{sin\,\gamma}\right|$ до α, мы получим следующие выражения выражение

$$dV = \frac{1}{2} arccos \frac{cos\,\gamma\ sin\,\alpha}{\sqrt{1 - cos^2\,\beta - cos^2\,\alpha}} d\alpha$$

$$V = \frac{1}{2} \int\limits_{arcsin\left|\frac{cos\,\beta}{sin\,\gamma}\right|}^{\alpha} arccos \frac{cos\,\gamma\ sin\,\varphi}{\sqrt{1 - cos^2\beta - cos^2\varphi}} d\varphi$$

Проведя аналогичные рассуждения для углов β и γ, получим ещё две формулы. Таким образом, мы приходим к

Теорема 4. *Объём V сферической ортосхемы $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$ может быть найден по любой из формул*

$$V = \frac{1}{2} \int\limits_{arcsin\left|\frac{cos\,\beta}{sin\,\gamma}\right|}^{\alpha} arccos \frac{cos\,\gamma\ sin\,\varphi}{\sqrt{1 - cos^2\beta - cos^2\varphi}} d\varphi \tag{3.4}$$

$$V = \frac{1}{2} \int\limits_{arccos(sin\,\alpha\ sin\,\gamma)}^{\beta} arccos \frac{cos\,\alpha\ cos\,\gamma\ cos\,\varphi}{\sqrt{(sin^2\varphi - cos^2\gamma)(sin^2\varphi - cos^2\alpha)}} d\varphi \tag{3.5}$$

$$V = \frac{1}{2} \int\limits_{arcsin\left|\frac{cos\,\beta}{sin\,\alpha}\right|}^{\gamma} arccos \frac{cos\,\alpha\ sin\,\varphi}{\sqrt{1 - cos^2\beta - cos^2\varphi}} d\varphi \tag{3.6}$$

Глава 4. Практическая часть

Вычислим объёмы ортосхем с конкретными значениями существенных углов и сравним их со значениями формулы Сфорца. Все вычисления были проведены в среде MatLab с точностью до 15 знаков после запятой.

1) $\alpha = \frac{5\pi}{12} + 0.0001$, $\beta = \frac{\pi}{6}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

```
format long;

alpha = 5*pi/12 + 0.0001;
beta = pi/6;
gamma = pi/2;

phi1 = asin( abs(cos(beta) / sin(gamma)) );
dV1 = @(x) acos( cos(gamma).*sin(x)./sqrt(1.-cos(beta).^2.-cos(x).^2) );
V1 = integral(dV1, phi1, alpha);
disp("Первая формула:");
disp(0.5*V1);

phi2 = acos(sin(alpha) * sin(gamma));
dV2 = @(x) acos( cos(alpha).*cos(gamma).*cos(x)./sqrt((1.-cos(gamma).^2.-cos(x).^2).*(1-cos(alpha).^2-cos(x).^2)) );
V2 = integral(dV2, phi2, beta);
disp("Вторая формула:");
disp(0.5*V2);

phi3 = asin( cos(beta) / sin(alpha) );
dV3 = @(x) acos( cos(alpha).*sin(x)./sqrt((1.-cos(beta).^2.-cos(x).^2)) );
```

Command Window

```
Первая формула:
   0.205695298172368

Вторая формула:
   0.205695298172368

Третья формула:
   0.205695298172368

Формула Сфорца:
fx   0.205695298172368
```

2) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{9\pi}{20}$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$.

```
format long;

alpha = pi/2;
beta = 9*pi/20;
gamma = pi/4;

phi1 = asin( abs(cos(beta) / sin(gamma)) );
dV1 = @(x) acos( cos(gamma).*sin(x)./sqrt(1.-cos(beta).^2.-cos(x).^2) );
V1 = integral(dV1, phi1, alpha);
disp("Первая формула:");
disp(0.5*V1);

phi2 = acos(sin(alpha) * sin(gamma));
dV2 = @(x) acos( cos(alpha).*cos(gamma).*cos(x)./sqrt((1.-cos(gamma).^2.-cos(x).^2).*(1-cos(alpha).^2-cos(x).^2)) );
V2 = integral(dV2, phi2, beta);
disp("Вторая формула:");
disp(0.5*V2);

phi3 = asin( cos(beta) / sin(alpha) );
dV3 = @(x) acos( cos(alpha).*sin(x)./sqrt((1.-cos(beta).^2.-cos(x).^2)) );
```

Command Window

```
Первая формула:
   0.493480220054468

Вторая формула:
   0.493480220054468

Третья формула:
   0.493480220054468

Формула Сфорца:
   0.493480220054468
```

Из приведённых результатов вычислений видно, что значения всех четырёх формул совпадают. Совпадение значений первой из полученных мной формул со значениями формулы Сфорца объясняется тем, что значения главной ветви логарифма, который стоит под знаком интеграла в формуле Сфорца, совпадают со значениями арккосинуса в первой формуле. Остаётся проверить оставшиеся две формулы на корректность, то есть, доказать совпадение значений всех трёх формул при любых значениях углов.

Глава 5. Анализ корректности формул

Проведём анализ корректности формул, используя теорему Шлефли. Обозначим интегралы в формулах (3.4)-(3.6) функциями

$$f_1(\alpha,\beta,\gamma) = \int\limits_{arcsin\left|\frac{cos\,\beta}{sin\,\gamma}\right|}^{\alpha} arccos\frac{cos\,\gamma\ sin\,\varphi}{\sqrt{1-cos^2\beta-cos^2\varphi}}d\varphi \tag{5.1}$$

$$f_2(\alpha,\beta,\gamma) = \int\limits_{arccos(sin\,\alpha\ sin\,\gamma)}^{\beta} arccos\frac{cos\,\alpha\ cos\,\gamma\ cos\,\varphi}{\sqrt{(1-cos^2\varphi-cos^2\gamma)(1-cos^2\varphi-cos^2\alpha)}}d\varphi \tag{5.2}$$

$$f_3(\alpha,\beta,\gamma) = \int\limits_{arcsin\left|\frac{cos\,\beta}{sin\,\alpha}\right|}^{\gamma} arccos\frac{cos\,\alpha\ sin\,\varphi}{\sqrt{1-cos^2\beta-cos^2\varphi}}d\varphi. \tag{5.3}$$

Теперь вычислим все частные производные и докажем равенство соответствующих частных производных при всех значениях углов α,β,γ.

Сперва зафиксируем углы β и γ и найдём частные производные по переменной α. В первой функции она стоит лишь в верхнем пределе, и мы сразу получаем

$$\frac{\partial f_1}{\partial\alpha} = arccos\frac{cos\,\gamma\ sin\,\alpha}{\sqrt{1-cos^2\beta-cos^2\alpha}}$$

В оставшихся двух функциях переменная α стоит как в нижних пределах, так и под знаком интеграла, поэтому предварительно мы докажем

Лемма 5.1. *Пусть $x\in[a_1,b_1]$, $\varphi(x,t)$ непрерывно дифференцируема на $[a_1,b_1]\times[a,b]$, $\psi:[a_1,b_1]\to[a,b]$ и $\psi\in C^1[a_1,b_1]$. Тогда для функции $\Phi(x)=\int\limits_{\psi(x)}^{c}\varphi(x,t)dt$, где $c=const$, верно следующее равенство:*

$$\Phi'(x) = -\psi'(x)\varphi(x,\psi(x)) + \int\limits_{\psi(x)}^{c}\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}dt \tag{5.4}$$

Доказательство. Рассмотрим предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}$. Разность в числителе можно переписать в виде

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x) = -\int\limits_{\psi(x)}^{\psi(x+\Delta x)} \varphi(x+\Delta x, t)dt + \int\limits_{\psi(x)}^{a} \left(\varphi(x+\Delta x, t)-\varphi(x,t)\right)dt.$$

Подставим это выражение в наш предел, представим дробь в пределе как сумму двух дробей

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-\int\limits_{\psi(x)}^{\psi(x+\Delta x)} \varphi(x+\Delta x, t)dt}{\Delta x} + \frac{\int\limits_{\psi(x)}^{a} \left(\varphi(x+\Delta x, t)-\varphi(x,t)\right)dt}{\Delta x}$$

и докажем существование предела для каждого слагаемого.

Применим к первому слагаемому первую теорему о среднем

$$\int\limits_{\psi(x)}^{\psi(x+\Delta x)} \varphi(x+\Delta x, t)dt = \varphi(x+\Delta x, \theta)\left(\psi(x+\Delta x)-\psi(x)\right),$$

где θ находится между значениями $\psi(x)$ и $\psi(x+\Delta x)$.

В силу непрерывной дифференцируемости функции $\psi(x)$, мы получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\psi(x+\Delta x)-\psi(x)}{\Delta x}\varphi(x+\Delta x,\theta) = \psi'(x)\cdot\varphi(x,\psi(x))$$

Для второго слагаемого применим теорему о перестановке интеграла и предельного перехода

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int\limits_{\psi(x)}^{a} (\varphi(x+\Delta x, t) - \varphi(x,t))\, dt}{\Delta x} = \int\limits_{\psi(x)}^{a} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x+\Delta x, t) - \varphi(x,t)}{\Delta x} dt$$

$$= \int\limits_{\psi(x)}^{a} \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} dt$$

Объединив выкладки, получим

$$\Phi'(x) = -\psi'(x)\varphi(x, \psi(x)) + \int\limits_{\psi(x)}^{a} \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} dt$$

Ч.т.д. □

Вычислим частную производную второй функции по переменной α, используя лемму (5.4). Для удобства обозначим нижний предел интеграла символом $\psi_1(\alpha)$.

$$\frac{\partial f_2}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\int\limits_{\psi_1(\alpha)}^{\beta} arccos \frac{cos\, \alpha\; cos\, \gamma\; cos\, \varphi}{\sqrt{(1 - cos^2\varphi - cos^2\gamma)(1 - cos^2\varphi - cos^2\alpha)}} d\varphi \right)$$

$$= -\frac{d\psi_1(\alpha)}{d\alpha} \cdot arccos \frac{cos\, \alpha\; cos\, \gamma\; sin\, \alpha\; sin\, \gamma}{\sqrt{(sin^2\gamma - sin^2\alpha\; sin^2\gamma)(sin^2\alpha - sin^2\alpha\; sin^2\gamma)}}$$

$$+ sin\, \alpha\, cos\, \gamma \int\limits_{\psi_1(\alpha)}^{\beta} \frac{cos\, \varphi\; sin\, \varphi}{(sin^2\alpha - cos^2\varphi)\sqrt{sin^2\alpha\, sin^2\gamma - cos^2\varphi}} d\varphi$$

Дробь, стоящая внутри арккосинуса в первом слагаемом, равна единице, и само слагаемое тогда равно нулю. В интеграле проведём замену переменной $r = \sqrt{sin^2\alpha\, sin^2\gamma - cos^2\varphi}$ и получим следующее равенство

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f_2}{\partial \alpha} &= sin\,\alpha\, cos\,\gamma \int\limits_0^{\sqrt{sin^2\alpha\, sin^2\gamma - cos^2\beta}} \frac{dr}{sin^2\alpha\, cos^2\gamma + r^2} \\
&= arctan\left(\frac{r}{sin\,\alpha\, cos\,\gamma}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{sin^2\alpha\, sin^2\gamma - cos^2\beta}} \\
&= arctan\left(\frac{\sqrt{sin^2\alpha\, sin^2\gamma - cos^2\beta}}{sin\,\alpha\, cos\,\gamma}\right) \\
&= arccos\left(\frac{cos\,\gamma\, cos\,\alpha}{\sqrt{1 - cos^2\alpha - cos^2\gamma}}\right) = \frac{\partial f_1}{\partial \alpha}
\end{aligned}
$$

Теперь найдём частную производную третьей функции по переменной α, обозначив нижний предел буквой $\psi_2(\alpha)$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f_3}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\int\limits_{\psi_2(\alpha)}^{\gamma} arccos\frac{cos\,\alpha\ sin\,\varphi}{\sqrt{1 - cos^2\beta - cos^2\varphi}} d\varphi\right) \\
&= -\frac{d\psi_2(\alpha)}{d\alpha} \cdot arccos\frac{cos\,\alpha\ \left|\frac{cos\,\beta}{sin\,\alpha}\right|}{\sqrt{\frac{cos^2\beta}{sin^2\alpha} - cos^2\beta}} \\
&+ sin\,\alpha \int\limits_{\psi_2(\alpha)}^{\gamma} \frac{sin\,\varphi}{\sqrt{sin^2\alpha\, sin^2\varphi - cos^2\beta}} d\varphi
\end{aligned}
$$

Аналогично предыдущему случаю, первое слагаемое равно нулю, и остаётся только интеграл. Проведя в нём замену $r = \frac{cos\,\varphi\, sin\,\alpha}{\sqrt{sin^2\alpha - cos^2\beta}}$, получим равенство

$$\frac{\partial f_3}{\partial \alpha} = -\int\limits_1^{\frac{cos\,\gamma\, sin\,\alpha}{\sqrt{sin^2\alpha - cos^2\beta}}} \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = arccos(r)\Big|_1^{\frac{cos\,\gamma\, sin\,\alpha}{\sqrt{sin^2\alpha - cos^2\beta}}}$$

$$= arccos\left(\frac{cos\,\gamma\, sin\,\alpha}{\sqrt{1-cos^2\alpha - cos^2\beta}}\right) = \frac{\partial f_1}{\partial \alpha}$$

Итак, мы убедились, что частные производные функций (5.1)-(5.3) по переменной α равны. Заметим, что во всех них переменные α и γ перестановочны, что означает равенство частных производных и по переменной γ. Аналогично, с использованием леммы (5.4), можно установить равенство частных производных рассматриваемых здесь функций по переменной β. Тогда их полные дифференциалы всюду равны, и найденные нами формулы объёмов сферических ортосхем действительно дают одинаковые значения объёмов и удовлетворяют теорему Шлефли.

Заключение

Итого, мной были получены интегральные формулы объёмов сферических ортосхем, численные значения для некоторых орстохем и проведён анализ корректности формул. Они оказались значительно проще, чем известные на данный момент формулы.

К тому же, они похожи на аналогичные формулы для объёмов гиперболических ортосхем, полученных В.А. Красновым [5]. При подстановке углов гиперболических ортосхем в мои формулы получаются значения объёмов по формулам В.А. Краснова, но со мнимой единицей. То же можно получить, если подставить значения углов сферических ортосхем в формулы объёмов гиперболических ортосхем, что намекает на некоторую двойственность формул объёмов ортосхем в гиперболическом и сферическом пространствах.

Список литературы

[1] Hugo Hadwiger, *Ungelöste Probleme*, Elemente der Mathematik. Birkhäuser, Basel, 1956.

[2] Винберг Э.Б., *"Объемы неевклидовых многогранников"*, УМН, 48:2(290) (1993), 17–46.

[3] L. Schlafli, *"Theorie der vielfachen Kontinuität"*, Gesammelte mathematische Abhandlungen, Birkhäuser, Basel, 1950.

[4] N. V. Abrosimov and A. D. Mednykh, *Volumes of polytopes in spaces of constant curvature*, Fields Inst. Commun., 2014, 70, No. 1, 1–26.

[5] В. А. Краснов, *"Объемы многогранников в неевклидовых пространствах постоянной кривизны"*, *Алгебра, геометрия и топология*, СМФН, 66, № 4, Российский университет дружбы народов, М., 2020, 558–679