**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ»**

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

Допустить к защите»

Заведующий кафедрой
прикладной информатики
и теории вероятностей
д.т.н., профессор
____________ К.Е. Самуйлов
г.

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Направление 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

ТЕМА «Применение методов теории массового обслуживания в страховании и финансовых задачах»

Выполнил студент **Иванов Роман Владимирович**

(Фамилия, имя, отчество)

Группа НКНбд-01-18

Студ. билет № 1032182526

Руководитель выпускной квалификационной работы

Зарядов И.С.
к.ф.-м.н., доцент кафедры ПИиТВ
(Ф.И.О., степень, звание, должность)

(Подпись)

Автор

(Подпись)

г. Москва

г.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Российский университет дружбы народов»

АННОТАЦИЯ

выпускной квалификационной работы

Иванов Роман Владимирович

(фамилия, имя, отчество)

на тему: «Применение методов теории массового обслуживания в страховании и финансовых задачах»

Данная работа посвящена изучению и анализу различных методов и моделей теории массового обслуживания, используемых при анализе деятельности финансовых компаний, в частности – страховых компаний. Большая часть моделей, построенных с помощью систем массового обслуживания и рассматриваемых в представленной работе, иллюстрирует формулы для расчета вероятностей банкротства страховых компаний в различных ситуациях: ограниченность срока действия договоров страхования, отказ клиентов от обслуживания, переменная интенсивность поступающих претензий и т.д. Также предлагается оценка иных различных вероятностных характеристик, вычисляемых с помощью полученных формул вероятностей банкротства страховой компании. Представленные методы расчета основных характеристик эффективности функционирования страховой компании позволяют менеджменту компании определять оптимальные размеры страховых взносов и прогнозировать будущие прибыли, что безусловно сказывается на конкурентоспособность компании в отрасли.

Автор ВКР ____________ Иванов Р.В.

Оглавление

Список основных сокращений

ВКР	–	выпускная квалификационная работа;
СМО	–	система массового обслуживания;
ТМО	–	теория массового обслуживания;
ПЛС	–	преобразование Лапласа-Стилтьеса
ФР	–	функция распределения

Введение

Финансовый рынок является одним из основных агрегированных макроэкономических рынков. Он связывает заемщиков, предъявляющих спрос на финансовые средства, и кредиторов, обеспечивающих предложение финансовых активов. В роли посредников, обеспечивающих данную связь, выступают коммерческие банки, страховые компании, пенсионные и инвестиционные фонды и т.д. Как правило, механизм работы финансовых посредников одинаков:

1) Получение денежных средств от кредиторов и последующая выплата процентов за их пользование;
2) Предоставление денежных средств заемщикам под определенный процент;
3) Возврат денежных средств в случае требования их кредитором/выплата заемщиком выданной взаймы суммы.

Денежные потоки, участвующие в вышеуказанном процессе, можно рассматривать как случайные потоки однородных событий, а финансового посредника – как систему, в которую поступают данные потоки (потоки заявок от клиентов). Система, обслуживающая поступающий в нее поток заявок, называется системой массового обслуживания (СМО). Исследованием подобных систем занимается ТМО (теория массового обслуживания) – наука, активно используемая при моделировании сетей передачи данных, информационно-вычислительных сетей и т.д. Таким образом, некоторые модели, рассматриваемые в ТМО можно применить в изучении механизма работы финансовых посредников.

Среди посредников финансового рынка особое место занимают страховые компании, поскольку являются важным фактором стабилизации рынков: инвестиции аккумулированных финансовых средств в различные финансовые инструменты и, как следствие, воздействие на финансовый рынок; обеспечение страховой защиты и, как следствие, обеспечение устойчивости самого рынка.

В классических математических моделях, применяемых для исследования страховых компаний, рассматривается капитал компании, поток поступающих в компанию страховых премий (поступающие заявки в систему), поток моментов наступления страховых выплат, а также поток самих страховых выплат.

Цель выпускной квалификационной работы: рассмотреть стохастические модели, модели марковских процессов для анализа работы страховых компаний.

Для достижения поставленной цели необходимо решить ряд **задач**:

1) Ознакомиться с различными марковскими моделями, разработанными для анализа работы страховых компаний и классифицировать их в зависимости от полученных с помощью модели результатов.

2) Подробно изучить модель с «нетерпеливыми» клиентами, рассмотрев 4 различных случая: одна единственная услуга, оказываемая страховой фирмой, и бесконечное число мест в очереди; больше, чем одна услуга, оказываемая страховой компанией, и бесконечное число мест в очереди; одна единственная услуга, оказываемая страховой компанией, и конечное число мест в очереди; больше, чем одна услуга, оказываемая, страховой фирмой, и конечное число мест в очереди.

3) С помощью языка программирования Python осуществить программную реализацию следующих моделей: одна единственная услуга, оказываемая страховой компанией, и конечное число мест в очереди; больше, чем одна услуга, оказываемая, страховой фирмой, и конечное число мест в очереди.

В качестве **методов исследования** выступают основные концепции теории массового обслуживания, стохастического анализа, теории вероятностей, использованные при обзоре различных математический моделей деятельности страховых компаний. Для реализации же системы с одной услугой, оказываемой страховой компанией, и конечным числом мест в очереди, а также системы с большим, чем одна услуга, оказываемой, страховой фирмой, и конечным числом мест в очереди был использован язык программирования Python.

Научная новизна представленной работы заключается в том, что в ней рассматриваются различные модели, анализирующие деятельность страховых компаний, а также проводится их классификация в соответствие с получаемыми результатами: модели, результатом которых является вероятностное распределение в зависимости от начального страхового капитала; модели, результат которых вероятностное распределение в зависимости от числа клиентов в фирме; имитационная модель числа произошедших, но не заявленных убытков; модели, использующие как элементы ТМО, так и элементы стоимостной теории.

Также анализируется модель страховой компании, сталкивающейся с «нетерпеливыми» клиентами, в которой вычисляются такие характеристики как: распределение вероятностей, средняя количество клиентов в фирме, среднее число клиентов в очереди, среднее время ожидания начала обслуживания, среднее время прибытия клиента в системе, вероятность обслуживания клиента, а также вероятность его «нетерпения».

Практическая ценность работы заключается в том, что обзор моделей, приведенный в ней, предлагает страховым компаниям набор методов для анализа их деятельности в зависимости от ситуации, с которыми они сталкиваются. Компании могут рассчитать распределение вероятностей в зависимости от текущего страхового капитала или количества пришедших клиентов и, как следствие, определить среднее число клиентов в системе, среднее время пребывания клиента в системе и т.д. Данные вычисления позволяют делать прогнозы и помогают руководству компании определять дальнейшие направления развития.

Подробно изученная и реализованная математическая модель компании с «нетерпеливыми» заявками позволяет рассчитать множество различных вероятностных характеристик, в том числе и вероятность отказа клиента от обслуживания. С помощью полученных результатов страховые компании могут решить, нужно ли проводить ряд мероприятий, способствующих «удержанию» клиента или же нет.

Структура выпускной квалификационной работы

Данная работа состоит из введения, трех разделов, заключения, списка литературы, а также приложения.

В первом разделе представлен обзор моделей, в которых используется методы теории массового обслуживания, для анализа деятельности страховых компаний.

Во втором разделе представлено подробное описание математических моделей страховых компаний, сталкивающихся с «нетерпеливыми» клиентами, в виде систем массового обслуживания $M|M|1|\infty, M|M|n|\infty, M|M|1|N$ и $M|M|K|N$.

В третьем разделе приводится программная реализация математической модели с «нетерпеливыми» клиентами.

В заключении подводятся общие итоги работы, излагаются основные результаты.

Апробация работы

Основные результаты работы были опубликованы в материалах Всероссийской конференция «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» ИТТММ-2022.

1. Обзор моделей, использующих методы ТМО, для анализа деятельности страховых компаний

Оценка эффективности работы страховых компаний осуществляется с помощью подходов теории вероятностей, статистики, теории рисков, стохастических процессов, а также теории массового обслуживания. С помощью подходов, используемых в данных теориях, можно найти такие показатели, как: вероятность разорения страховой компании, ожидаемая прибыль, среднее число клиентов в страховой компании, среднее время обслуживания претензии со стороны клиента и т. д. Успех страховой компании на высоко конкурентном рынке во многом зависит от того, насколько точно компания способна оценить вышеперечисленные показатели.

На данный момент существует два типа моделей оценки риска страховых компаний [1]: модель индивидуального риска (статическая модель) и модель коллективного риска (динамическая модель). Для первой модели характерны следующие предпосылки: объекты страхования формируются в один момент времени; срок действия их договоров одинаков; в течение данного срока могут происходить страховые события, по которым в дальнейшем необходимо провести выплаты. Предпосылки второй модели, следующие: моменты времени, в которые заключаются страховые сделки, образуют случайный процесс; каждый страховой договор имеет свой срок действия; в течение периода действия срока договора могут происходить страховые случаи, по которым в дальнейшем необходимо провести выплаты.

Статьи в данной работе можно классифицировать в зависимости от результатов, полученных авторами. Так к первой группе относятся статьи, в которых приводятся вероятности разорения страховой компании в зависимости от страхового капитала компании.

Например, в работе [2] представлена классическая стохастическая модель, используемая в теории рисков для анализа работы страховой компании.

Классическая модель:

$$X(t) = X(0) + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i \qquad (1.1)$$

c – размер страховой премии

$u = X(0)$ – первоначальный капитал компании

$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$ – суммарная стоимость претензий за интервал времени (0, t]

N(t) – стохастический процесс, представляющий число претензий

1. Вероятность разорения при экспоненциальном распределении поступающих претензий Z_i ($f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}}$, x > 0):

$$\varphi(u) = \frac{1}{1+\rho} e^{\frac{-\rho u}{\mu(1+\rho)}}, \tag{1.2}$$

где $\rho = \frac{c-\lambda\mu}{c\mu}$

2. Вероятность разорения, в случае если поступающие претензии представляют из себя комбинацию экспоненциальных распределений Z_i ($f(x) = \sum_{j=1}^{n} A_j \beta_j e^{-\beta_j x}$, x > 0, $\beta_j > 0$, $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = 1$):

$$\varphi(u) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{C_{jk}}{\beta_j} e^{-r_k u}, \tag{1.3}$$

где

$$C_{jk} = \frac{\frac{A_j}{\beta_j - r_k}}{\sum_{l=1}^{n} \frac{A_l}{(\beta_l - r_k)^2}}$$

3. Вероятность разорения, в случае если поступающие претензии представляют из себя комбинацию специфических гамма распределений Z_i ($f(x) = \sum_{j=1}^{n} A_j \beta_j^2 x e^{-\beta_j x}$, x > 0):

$$\varphi(u) = \sum_{k=1}^{2n} C_k' e^{-r_k u}, \tag{1.4}$$

где

$$C'_k = \frac{\sum_{j=1}^{n} A_j \frac{3 - \frac{2r_k}{\beta_j}}{(\beta_j - r_k)^2}}{\sum_{j=1}^{n} A_j \frac{3\beta_j - r_k}{(\beta_j - r_k)^3}}$$

4. Вероятность разорения при гамма распределении поступающих претензий Z_i $\left(f(x) = \frac{\beta(\beta x)^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}\right)$

$$\varphi(u) = 1 - \frac{\rho}{1+\rho}\left\{e^{-\frac{\beta u}{\alpha(1+\rho)}} + e^{-\beta u}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{-(\beta x)^{\alpha+1}}{\alpha(1+\rho)}\right]^k \times \frac{M\left\{k+1, k(\alpha+1)+1, \beta x\left[1+\left(\alpha(1+\rho)\right)^{-1}\right]\right\}}{\Gamma[k(\alpha+1)+1]}\right\}, \qquad (1.5)$$

где

$$M(a,b,z) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+j-1)z^j}{b(b+1)\ldots(b+j-1)j!}$$

В работе [3] авторы предлагают эффективный и простой метод расчета вероятностной оценки риска страховой компании, основанной на изучении аналитической модели с использованием математических инструментов комплексного анализа. Вывод модели предполагает использование обратного преобразования Лапласа, экспоненциального распределения выплат по поступающим в компанию заявкам, а также неравенство Крамера-Лундберга:

$$\Phi(\omega) = 1 - \frac{\lambda\beta}{c} e^{\left(\frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\beta}\right)x} = 1 - \frac{1}{1+\gamma} e^{-\frac{\gamma x}{(1+\gamma)m}}, \qquad (1.6)$$

ω – начальный капитал.

γ – коэффициент загрузки

λ – параметр экспоненциального распределения, характеризующий число требований по оплате

β – параметр экспоненциального распределения, характеризующий величину выплат

$c = (1+\gamma)\lambda m$ – выражение для ставки страхового дохода

Также для случая $m = \beta = 0.78$ и $\lambda = \$\,4\,million$ был построен график зависимости платежеспособности страховой компании от параметров распределения для 20 месяцев (рис. 1.1).

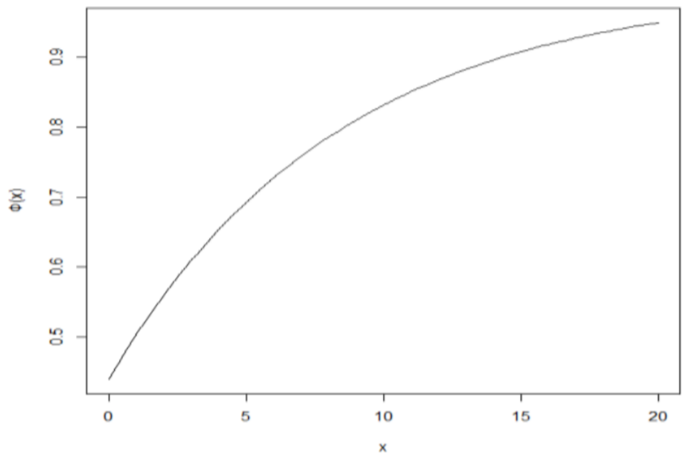

Рисунок 1.1: Зависимость платежеспособности страховой компании от параметров распределения [3]

Работа [4] также рассматривает процесс поступления претензий по выплате страховых взносов и, как следствие, вероятность разорения компании. Страховая компания «разоряется», если ей не хватило собственных средств компании и привлеченных средств из резервного фонда для текущих выплат. В качестве результата было рассмотрено два случая:

1) Сумма по выплате поступивших претензий меньше допустимого уровня ($x < \omega_0$):

1.1) За промежуток времени Δt не поступило ни одной претензии, обслуживания не было, в момент времени t время ожидания не превышало допустимого уровня:

$$P(t; x + \Delta t) \cdot \chi(x + \Delta t < \omega_0) \cdot (1 - \lambda\Delta t) \cdot (1 - \mu\Delta t) \quad (1.7)$$

1.2) За промежуток времени Δt не поступило ни одной претензии, обслуживания не было, в момент времени t время ожидания превышало допустимый уровень:

$$P(t; x + \Delta t) \cdot \chi(x + \Delta t \geq \omega_0) \cdot \mu_2\Delta t \cdot (1 - \lambda\Delta t) \quad (1.8)$$

1.3) Через промежуток времени $z < \Delta t$ поступила претензия, время обслуживания претензии равно u, в момент времени t время ожидания равно y, причем $u > \Delta t - 1$ и $y - \Delta t + u < x$:

$$P(t + \Delta t; x) = P(t; x + \Delta t) \cdot \chi(1 - \lambda\Delta t) \cdot (1 - \mu\Delta t) + P(t; x + \Delta t) \cdot$$
$$(x + \Delta t \geq \omega_0) \cdot \mu_2\Delta t \cdot (1 - \lambda\Delta t) + \iiint\limits_{\substack{z<\Delta t \\ y-\Delta t+u<x \\ u>\Delta t-z}} d_y P(t; y) \cdot \lambda dz \cdot b(u)du, \ x < \omega_0 \quad (1.9)$$

2) Сумма по выплате поступивших претензий больше допустимого уровня ($x \geq \omega_0$):

2.1) За промежуток времени Δt не поступило ни одной претензии, обслуживания не было:

$$P(t; x + \Delta t) \cdot \chi(x + \Delta t \geq \omega_0) \cdot (1 - \lambda\Delta t) \cdot (1 - \mu\Delta t) \quad (1.10)$$

2.2) В момент времени t оба прибора заняты, время ожидания равно y, через промежуток времени $z < \Delta t$ поступила претензия, время обслуживания претензии равно u, причем $y + u < x$ и осточное время обслуживания на первом и втором приборах больше Δt:

$$\int\limits_{u=0}^{\infty} \int\limits_{\substack{y\geq\omega_0 \\ y+u<x}} b(u)du \int\limits_{z<\Delta t} \lambda dz \, d_y P(t; y) = \lambda\Delta t \int\limits_{u=0}^{\infty} b(u)du \int\limits_{\substack{y\geq\omega_0 \\ y+u<x}} d_y P(t; y) \quad (1.11)$$

2.3) В момень времени t занят только основной прибор и остаточное время обслуживания равно y:

$$\int_{y<\omega_0} d_y P(t; y) \int_{z<\Delta t} \lambda dz \int_{\substack{u>0 \\ y+u-z\geq\omega_0}}^{\infty} b(u)du \cdot \chi(\min\{y - \Delta t; u - \Delta t + z\} < x) \quad (1.12)$$

2.4) В момень времени t заняты оба прибора и время ожидания равно y:

$$\frac{P(t+\Delta t;x)-P(t;x)}{\Delta t}-\frac{P(t;x+\Delta t)\cdot\chi[(x+\Delta t<\omega_0)+\chi(x+\Delta t\geq\omega_0)]-P(t;x)}{\Delta t}$$

$$\to\frac{\partial P(t;x)}{\partial t}-\frac{\partial P(t;x)}{\partial x}$$

$$=-P(t;x)\cdot[\chi(x<\omega_0)+\chi(x\geq\omega_0)]\cdot(\lambda+\mu)+P(t;x)\cdot\chi(x\geq\omega_0)$$

$$\cdot\mu_2+\lambda\iint\limits_{\substack{y+u<x\\u>0\\y\geq0}}d_yP(t;y)\cdot b(u)du+\lambda\int\limits_{u=0}^{\infty}b(u)du\int\limits_{\substack{y\geq\omega_0\\y+u<x}}d_yP(t;y)$$

$$+\int\limits_{y<\omega_0}d_yP(t;y)\int\limits_{\substack{u>0\\y+u\geq\omega_0}}^{\infty}b(u)du\cdot\chi(\min\{y;u\}<x)+b(0)$$

$$*\int\limits_{y\geq0}d_yP(t;y)\int\limits_{y-x}^{y-\omega_0}b(v)dv. \qquad (1.13)$$

где:

$\lambda(t)$ – интенсивность поступления вызовов

$\mu(\tau)$ – интенсивность обслуживания вызовов

ω_0 – допустимый уровень накопления невыполненных претензий

$\mu_2 = 2\mu$ – подключение дополнительного устройства

u – время обслуживания вызова

$b(u)$ – функция плотности

Часто в работе страховых компаний возникает фактор сезонности, который влияет на интенсивность потока страховых выплат. Например, страхование автотранспорта в зависимости от погодных условий. Таким образом появляется необходимость во введении переменной интенсивности потока страховых выплат. В работе [5], посвященной изучению данной темы, выводятся такие характеристики как вероятность разорения страховой компании, а также условное среднее время до ее разорения.

Задается интенсивность потока страховых платежей $\lambda(t)$, являющаяся однородной цепью Маркова с непрерывным временем и n состояниями $\lambda(t) = \lambda_i(t)$

Вероятность разорения страховой компании при нулевом начальном капитале определяется для двух случаев:

1) Вероятность разорения страховой компании при большом значении нагрузки страховой премии θ ($\theta > 1$), которое выводится с использованием преобразования Лапласа:

$$g(0) = \frac{\theta}{1+\theta} \tag{1.14}$$

2) Вероятность разорения компании при любом отличном от нуля капитале s:

$$p_i(s) = \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{A_2}{A_1}\theta s} + O(\theta) \tag{1.15}$$

где θ – нагрузка страховой премии ($\theta \gg 1$)

$$A_1 = \frac{\lambda_0 a_2}{2} - a^2 \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_0)\pi_i \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij}(\lambda_j - \lambda_0)$$

(R – матрица, обратная матрице инфетезимальных характеристик)

$$A_2 = \lambda_0 a.$$

Страховая компания, как и любой другой участник финансового рынка вырученные средства вкладывает в финаносвые инструменты. В работе [6] рассматривается вероятность разорения страховой компании в случае вложения ею капитала u в рискованные инвестиционные инструменты. В работе предлагаются две теоремы:

Теорема 1. Пусть процесс поступления претензий основан на общей модели востсановления риска, а их размер имеет Парето распределение. Если страховой капитал вложен в рискованный актив, то вероятность разорения за конечное время удовлетворяет следующему условию:

$$\varphi(u;T) \sim \bar{F}(u) \int_0^T e^{\left(\alpha^2 \frac{\sigma^2}{2} - k\alpha\right)s} dm(s) \tag{1.16}$$

где $k = r - \frac{1}{2}\sigma^2$ ($r \geq 0$ – средняя доходность, $\sigma \geq 0$ – коэффициент флуктуации);

α – параметр Парето распределения

$m(s) = EN(s)$ – функции восстановления процеса поступления.

Данная теорема устанавливает связь между веротяностью разорения за конечное время и функциями восстановления процесса поступления.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Если параметры удовлетворяют неравенству $\frac{\alpha^2}{2}(1+\alpha) < r$, то веротяность разорения за бесконечное время удовлетворяет следующему условию:

$$\varphi(u) \sim \bar{F}(u) \frac{Ee^{\left(\frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2-\alpha k\right)\theta_1}}{1 - Ee^{\left(\frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2-\alpha k\right)\theta_1}} \tag{1.17}$$

Вторая группа статей – статьи, в которых рассматривается распределение вероятностей числа страхуемых страховой компанией объектов (домохозяйства, машины и т.д.) в определенные моменты времени.

В работе [7] рассматривается математическая модель страховой компании с бесконченым числом обслуживающих приборов, т.е. потенциальный рынок страховых услуг (страховое поле) считается бесконечным. В качестве основных показателей эффектинвости модели рассматриваются число застрахованных рисков $l(t)$ в момент времени t, а также капитал компании $S(t)$ в момент времени t. Тогда для распределения вероятностей состояний двумерной цепи Маркова в момент времени, входящий поток которой является пуассоновским с интенсивностью λ, а обслуживание производится по экспоненциальному закону с интенсивностью μ, $P(l,i,t) = P\{l(t) = l, i(t) = i\}$ с помощью производящей функции распределения вида $F(x,y,t) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} x^l y^i P(l,i,t)$ можно получить следующее выражение

$$F(x,y,t) = e^{\frac{\lambda}{\mu}(x-1)(y-1)\left(1-e^{-\mu t}\right)+\frac{\lambda}{\mu}(y-1)\left(1-e^{-\mu t}\right)+\lambda(x-1)t}. \tag{1.18}$$

Также были выведены такие вероятностные характеристики как математическое ожидание и дисперсия капитала компании соответственно:

$$MS(t) = \lambda t a_1 + \frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t})(b_1 - \psi_n c_1), \tag{1.19}$$

где φ – страховая премия, $M(\varphi) = a_1$ – математическое ожидание страховой премии;

ξ – страховой взнос, $M(\xi) = b_1$ – математическое ожидание страхового взноса;

η – страховое возмещение, $M(\eta) = c_1$ – математическое ожидание страхового возмещения;

ψ_v – интенсиовность наступления страховых случаев.

$$DS(t) = \lambda t a_2 + \frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t})\left(2a_1c_1 + \ b_2 - \psi_\eta^2 c_2\right). \tag{1.20}$$

где φ – страховая премия, $M(\varphi) = a_1$ – математическое ожидание страховой премии, $M(\varphi^2) = a_2$ – второй момент для страховой премии;

ξ – страховой взнос, $M(\xi) = b_1$ – математическое ожидание страхового взноса, $M(\xi^2) = b_2$ – второй момент для страхового взноса;

η – страховое возмещение, $M(\eta) = c_1$ – математическое ожидание страхового возмещения, $M(\eta^2) = c_2$ – второй момент для страхвого взноса;

ψ_ν – интенсивность наступления страховых случаев.

В работе [8] рассматривается модель страхования автомобилей, в которой учтены 4 параметра: интенсивность исключения машины из страхового полиса, интенсивность включения машины в страховой полис, интенсивность расторжения страхового контракта, интенсивность продления страхового контракта.

В качестве результата авторы привели распределение вероятностей для рассматриваемой модели:

$$P_{J(t)}(z,t) = \prod_{i=1}^{R_0}\left[1 - e^{-\gamma t}p^{[t+c_i]}\left(1 \; - \; ((z-1)e^{-\mu t}+1)^{a_i-1} z e^{(z-1)(1-e^{-\mu t})\frac{\lambda}{\mu}}\right)\right] \times e^{\tau t q_t\left(e^{\frac{\lambda}{\mu}(z-1)} z-1\right)}. \qquad (1.21)$$

$J(t)$ – общее число застрахованных домохозяйств в момент времени t

τ – интенсивность поступления новых домохозяйств

γ – интенсивность, с которой домохозяйство отказывается от страхового полиса

p – вероятность обновления страхового контракта

λ – интенсивность поступления новых машин в страховой полис

μ – интенсивность, с которой домохозяйство исключает машину из страхового контракта

На основе имеющихся данных по страхованию машин Канады с помощью статистических методов (метода максимального правдоподобия) была проведена оценка 4 вышеупомянутых параметра.

Также авторы классифицировали пользователей, которые с большей вероятностью исключат машину из страхового полиса. Помимо этого были расчитаны ожидаемое количество застрахованных автомобилей, пожизненная ценность клиента, которая расчитывает будущую прибыль компании.

В силу растущей конкуренции на рынке страховых услуг вопрос о том, как «удержать» клиентов и не дать им уйти от страховой компании становится все более актуальным [9]. В случае, если клиенты приобретают страховой полис (заявки приходят в систему) согласно Пуассоновскому распределению с интенсивностью λ, время обслуживания клиентов распределено экспоненциально с параметром μ, клиенты отказываются от обслуживания (заявки становятся «нетерпеливыми») согласно экспоненциальному распределению с параметром ξ, а прибывающие клиенты отказываются от обслуживания с вероятностью $\frac{n}{N}$ (где n – количество клиентов в компании, N – максимально возможное число клиентов в системе), то стационарные вероятности определяются следующим образом:

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{N-(k-1)}{N} \frac{\lambda}{\mu+(k-1)\xi p} P_0; 1 \le n \le N-1, \tag{1.22}$$

$$P_N = \prod_{k=1}^{N} \frac{N-(k-1)}{N} \frac{\lambda}{\mu+(k-1)\xi p} P_0;\ \ n = N, \tag{1.23}$$

$$P_0 = \frac{1}{\left(1 + \ \sum_{n=1}^{N} \prod_{k=1}^{n} \frac{N-(k-1)}{N} \frac{\lambda}{\mu+(k-1)\xi p}\right)}, \tag{1.24}$$

где p – вероятность удержания клиента в системе.

Ожидаемое число клиентов в системе (ожидаемый размер системы) определяется следующим образом:

$$L_S = \sum_{n=1}^{N} n \prod_{k=1}^{N} \frac{N-(k-1)}{N} \frac{\lambda}{\mu+(k-1)\xi p} P_0. \tag{1.25}$$

С помощью данных формул можно представить стоимостную модель, которая определяет оптимальный уровень общей ожидаемой прибыли компании.

В работе [10] рассматривается метод прогнозирования ожидаемого дохода страховой компании в случае, если число максимально возможных клиентов в компании К является большим, а срок действия страховых договоров ограничен.

Для начала необходимо пояснить параметры, используемые в итоговом уравнении.

K – максимально возможное число клиентов ($K \gg 1$)

C_0 – пребывание потенциально возможного клиента во «внешней среде»

C_1 – состояние оценки иска

C_2 – состояние «ожидания»

C_3 – состояние осуществления кассовых операций

C_4 – состояние заключения договора

В состоянии C_i задействовано m_i сотрудников компании ($i = 1,3,4$).

Времена обслуживания заявок клиентов распределены по показательному закону с интенсивностями μ_1, μ_3, μ_4 соответственно.

Интенсивность μ_{2i} ($i = 0, 1$) – интенсивность времени обслуживания заявки, переход которой осуществляется из состояния 2 в состояние i ($i = 0, 1$).

Вероятность перехода из состояния C_0 в состояние C_4, а также из состояния C_2 в C_i ($i = 0, 1$) на интервале времени $[t, t + \Delta t]$ равна $\mu_0(t)\Delta t + o(t)$ и $\mu_{2i}(t)\Delta t + o(t), i = 0, 1$.

СМО включает в себя K заявок и 5 систем обслуживания S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 с числом линий обслуживания соответственно K, m_1, K, m_3, m_4.

$k(t) = (k, t) = (k_1(t), k_2(t), k_3(t), k_4(t))$ – состояние страховой компании в момент времени, где $k_i(t)$ – общее число заявок в состоянии C_i в момент времени t.

$V(k, t)$ – полный ожидаемый доход, который получит страховая компания за время t, если в начальный момент времени она находится в состоянии (k, t_0).

Доход, приносимый за малый промежуток времени: $R_0, -R_4, -R_3, -R_1, -R_{21}, -R_{20}$.

Тогда результатом будет обыкновенное дифференциальное уравнение, решение которого является прогнозным значением прибыли

$$\frac{d}{dt}\overline{v_{G^*}}(t) = \overline{v_{G^*}}(t)\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial A_i(x,t)}{\partial x_i} + \frac{1}{mes(G^*)}\int_{G^*}\Bigg[R + K\mu_0(t)x_0R_0 - K\sum_{i=3}^{4}\mu_i \min(l_i, x_i)\,R_i - K\mu_1 \min(l_1, x_1)\,R_1 - K\sum_{i=0}^{1}\mu_{2i}(t)x_2R_{2i}\Bigg]dx \qquad (1.26)$$

где

$A_1(x,t) = -\mu_{21}(t)x_2 + \mu_1 min(l_1, x_1),$

$A_2(x,t) = \mu_{20}(t)x_2 + \mu_{21}(t)x_{\ 2} - \mu_3 min(l_1, x_1),$

$A_3(x,t) = \mu_3 min(l_3, x_3) - \mu_4 min(l_4, x_4)x_2 - \mu_1 min(l_1, x_1),$

$A_4(x,t) = \mu_4 min(l_4, x_4) - \mu_0(t)x_0.$

Следует выделить работу [11], которую нельзя отнести ни к одной из вышеперечисленных групп, поскольку в ней определяется число убытков в определенный момент времени t. Между наступлением страхового случая и извещением клиентом страховщика проходит определенный промежуток времени. Поэтому возникает необходимость в создании резерва произошедших, но незаявленных страховых убытков, размер которого оказывает влияние на налогооблагаемую базу страховой компании, тарифную политику, платежеспособность и т.д. В работе рассматривается стохастическая имитационная модель оценки резервов произошедших, но не заявленных убытков в виде одноканальной СМО.

В работе было использовано разложение Дуба-Мейера для субмартингалов, которое дает следующее: $A_t = \tilde{A}_t + m_t^A$; $D_t = \widetilde{D}_t + m_t^D$, $m^A = (m_t^A)_{t\geq 0}$ и $m^D = (m_t^D)_{t\geq 0}$ - квадратично-интегрируемые мартингалы на стохастическом базисе В. Последовательность $(\xi_t, F_t)_{t\geq 1}$ называется мартингалом на стохастическом базисе В$(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{F}, \{F_t\}_{t\geq 0}, \boldsymbol{P})$ (последовательность $\{\xi_t\}_{t\geq 0}$ согласована с потоком $\{F_t\}_{t\geq 0}$), если $\sup\limits_t M|\xi_t| < \infty$ и $M(\xi_{t+s}|F_t) = \xi_t$ для $\forall s \geq 0$. Если же выполнено $M(\xi_{t+s}|F_t) \geq \xi_t$, то последовательность $(\xi_t, F_t)_{t\geq 1}$ называется субмартингалом [13].

С помощью вышеприведенного разложения была выведена формула для резервов произошедших, но не заявленных убытков:

$$I_t = \int_0^t \eta_{(1+A_{S^-})} \cdot dA_s - \int_0^t \eta_{(1+D_{S^-})} \cdot dD_s, \tag{1.27}$$

$\tilde{A}_t = \int_0^t \lambda ds$ и $\widetilde{D}_t = \int_0^t I(Q_s \geq 0) \cdot \delta ds$ – компенсаторы процессов A_t и D_t

$\tilde{A}_t$ называется компенсатором случайного процесса A_t, если $A_t = \widetilde{A_t} + m_t^A$ и $D_t = \widetilde{D_t} + m_t^D$, где $m^A = (m_t^A)_{t\geq 0}$ и $m^D = (m_t^D)_{t\geq 0}$ – квадратично-интегрируемые мартингалы на стохастическом базисе B.

$(A_t)_{t \geq 0}$ - точечный считающий процесс числа произошедших убытков в момент времени $t \geq 0$. Независимый пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda > 0$.

$(D_t)_{t \geq 0}$ - точечный считающий процесс числа заявленных, но неурегулированных убытков в момент времени $t \geq 0$. Независимый пуассоновский процесс с интенсивностью $\delta > 0$.

$(Q_t)_{t \geq 0}$ - точечный считающий процесс числа произошедших, но незаявленных убытков в момент времени $t \geq 0$.

Балансовое уравнение: $Q_t = Q_0 + A_t - D_t$.

Также стоит отметить группу статей, в которых помимо использования методов теории массового обслуживания и стохастического анализа, приводится стоимостная модель для поиска выручки, издержек, а также прибыли.

Например, в работе [9] с помощью полученного распределения вероятностей (1.22-1.24) и ожидаемого числа клиентов в системе (1.25) авторы, определили такие параметры как: общие ожидаемые издержки (TEC), общую ожидаемую выручку (TER) и, как следствие, общую ожидаемую прибыль (TEP). Ниже приведены используемые формулы, а также таблица, приведенная исследователями (таб. 1.1)

$$TEC = C_s\mu + C_h L_s + C_L \lambda P_N + C_r R_r + C_b R_b + C_R R_R, \tag{1.28}$$

$$TER = RL_s - R\lambda P_N - C_r R_r - RR_r - RR_b, \tag{1.29}$$

$$TEP = TER - TEC, \tag{1.30}$$

где:

C_s – стоимость услуги в единицу времени

C_h – стоимость задержки в единицу времени

C_L– стоимость с каждой потери в единицу времени

C_r – стоимость отказа в единицу времени

C_R – стоимость удержания отказавшегося клиента в единицу времени

C_b – стоимость с каждым отказавшимся клиентов

R – выручка за оказания услуги каждому клиенту в единицу времени

$R_r = \sum_{n=1}^{N}(n-1)\xi p P_n$ – средняя частота отказа

$R_R = \sum_{n=1}^{N}(n-1)\xi q P_n$ – средняя частота удержания

$R_b = \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{N} \lambda P_n$ – доход, полученный за предоставление услуги каждому клиенту в единицу времени

Таблица 1.1. Значения TEC, TER и TEP в зависимости от q, и C_R

q	C_R	TEC	TER	TEP
0.0	0	17.56317	35.62972	18.06654
0.1	6	17.57529	35.96306	18.38777
0.2	8	17.59855	36.29994	18.70139
0.3	12	17.64968	36.64041	18.99073
0.4	14	17.70146	36.98456	19.28309
0.5	20	17.82078	37.33243	19.51166
0.6	25	17.95837	37.68412	19.72575
0.7	32	18.16530	38.03969	19.87439
0.8	36	18.34642	38.39921	20.5279
0.9	40	18.55261	38.76276	20.21015
1.0	45	18.81304	39.13043	20.31739

Также к данной группе статей относится работа [12], посвященная изучению модели ТМО вида $M|M|4: GD|\infty|\infty$, которая применяется в изучении деятельности страховой компании XYZ в индонезийском городе Тасикмалае. Поступающие в систему заявки имеют пуассоновское распределение (M) с интенсивностью λ, экспоненциальное обслуживание (M) с интенсивностью μ, 4 обслуживающих прибора ($c = 4$), общую дисциплину очереди (GD), а также бесконечные размер очереди (∞) и источника вызова (∞).

Были представлены следующие формулы для многосервисной модели.

Коэффициент использования:

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu}. \tag{1.31}$$

Вероятность простоя обслуживания клиента:

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \left(\frac{1}{1 - \frac{\rho}{c}} \right) \right\}^{-1}. \tag{1.32}$$

Среднее число клиентов в очереди:

$$L_q = \left[\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\,(c - \rho)^2} \right] P_0. \tag{1.33}$$

Среднее число клиентов в системе:

$$L_s = \left[\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\,(c - \rho)^2} \right] P_0 + \rho. \tag{1.34}$$

Среднее время пребывания клиента в очереди:

$$W_q = \frac{\rho^c}{\mu(c-1)!\,(c-\rho)^2} P_0. \quad (1.35)$$

Среднее время пребывания клиента в системе:

$$W_q = \frac{\rho^c}{\mu(c-1)!\,(c-\rho)^2} P_0 + \frac{1}{\mu}. \quad (1.36)$$

Средняя загруженность обслуживающего прибора:

$$\bar{c} = \left\{\left[\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\,(c-\rho)^2}\right] P_0 + \rho\right\} - \left\{\left[\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\,(c-\rho)^2}\right] P_0\right\}. \quad (1.37)$$

Предпосылка о пуассоновском входящем потоке, а также экспоненциальном времени обслуживания были доказаны эмпирически с помощью одновыборочного критерия Колмогорова-Смирнова.

С помощью вышеприведенных формул (1.31-1.36), авторы рассчитали параметры, используемые при работе со стоимостной моделью: операционные издержки, издержки ожидания, общие издержки (таб. 1.2).

Таблица 1.2. Ожидаемые общие издержки

servers (c)	**Marginal cost C_1**	**Operational Cost $C_1 \times c$ (EOC(c))**	**Cost of customer's waiting per minute (C_2)**	**The average number of customer in system (Ls)**	**Waiting Cost $C_2 \times$ Ls (EWC(c))**	**Total Cost EWC(c)+ EOC(c) (ETC(c))**
4	612	2.448	327	6,1188	2.000	4.448
5	612	3.060	327	3,8617	1.263	4.323
6	612	3.672	327	3,441	1.125	4.797

2. Модель для анализа деятельности страховых компаний, сталкивающихся с «нетерпеливыми» клиентами

Сектор страховых услуг является высококонкурентным рынком. Возникают ситуации, когда клиенты данной страховой компании, будучи недовольными обслуживанием или же осведомленными ценами на услуги в другой компании, решают отказаться от дальнейшего сотрудничества. Для страховой компании возникает необходимость в создании модели, предсказывающей уход клиентов из компании, и на основе которой, как следствие, можно разработать различные способы их удержания (повышение качества услуг, реклама и т.д.). В данном случае процесс работы страховой компании можно рассматривать как систему массового обслуживания с «нетерпеливыми» заявками. Рассмотрим более подробно данную систему.

2.1. Модель $M|M|1|\infty$ с «нетерпеливыми» клиентами

Модели с «нетерпеливыми» заявками делятся на два типа: в зависимости от того, покидает ли заявка очередь, или покидает ли заявка обслуживающий прибор. Классическая система $M|M|1|\infty$ с «нетерпеливыми» заявками (клиентами) [14] рассматривает входящий поток, как пуассоновский с интенсивностью λ, время обслуживания распределено по экспоненциальному закону с параметром μ, система имеет 1 обслуживающий прибор (1 услуга в страховой компании) и очередь неограниченного размера. Также предполагается, что максимальное время ожидания заявки в очереди также распределено по экспоненциальному закону с интенсивностью ξ. Граф интенсивностей переходов для данной системы представим следующим образом:

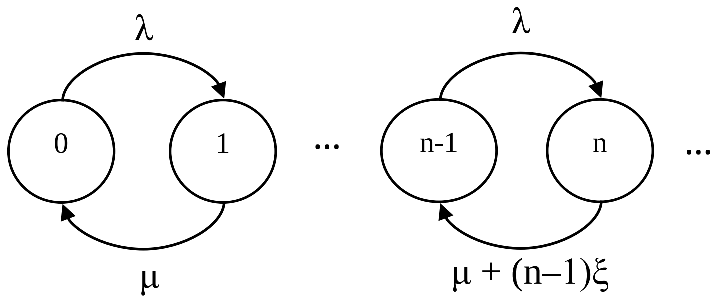

Рисунок 2.1: Система $M|M|1|\infty$ с «нетерпеливыми» клиентами

Дифференциально-разностное же уравнение для вышеприведенной системы имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ \dfrac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda + \mu + (n-1)\xi)P_n(t) + (\mu + n\xi)P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t), n \geq 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

В стационарном состоянии при $t \to \infty$ $\lim\limits_{t\to\infty} P_n(t) = P_n$ и $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$

Таким образом, получаем:

$$\begin{cases} 0 = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ 0 = -(\lambda + \mu + (n-1)\xi)P_n(t) + (\mu + n\xi)P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t), n \geq 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

Стационарное распределение вероятностей является решением системы уравнений глобального баланса (СУГБ). Но в задачах ТМО также используется другой вид балансового уравнения – система уравнений локального баланса (СУЛБ), которая приравнивает два встречных потока между состояниями i и $i + 1$.

СУЛБ для вышеприведенной системы имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ \lambda p_1 = (\mu + \xi)p_2 \\ \cdots \\ \lambda p_{n-1} = (\mu + (n-1)\xi)p_n \\ \cdots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = \dfrac{\lambda}{\mu} p_0 \\ p_2 = \dfrac{\lambda}{\mu + \xi} p_1 \\ \cdots \\ p_n = \dfrac{\lambda}{\mu + (n-1)\xi} p_{n-1} \\ \cdots \end{cases}$$

Подставляя значение p_1 в p_2, p_2 в $p_3 \ldots$, получаем следующее выражение:

$$p_i = p_0 \frac{\lambda^i}{\mu(\mu + \xi) \cdots (\mu + (i-1)\xi)}, i \geq 1 \quad (2.3)$$

Используя правило нормировки ($\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$), получаем следующее выражение для вероятности p_0:

$$p_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{\mu(\mu + \xi) \cdots (\mu + (i-1)\xi)}\right)^{-1} \quad (2.4)$$

Также можно привести такие стационарные характеристики, как среднее число клиентов в компании и средняя длина очереди из клиентов.

Стационарное среднее число клиентов в компании определяется следующим образом:

$$N=\sum_{i=0}^{\infty} ip_i = p_0\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i\lambda^i}{\mu(\mu+\xi)\cdots(\mu+(i-1)\xi)} \qquad (2.5)$$

Средняя длина очереди из клиентов определена следующим образом:

$$Q=\sum_{i=1}^{\infty}(i-1)p_i = p_0\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(i-1)\lambda^i}{\mu(\mu+\xi)\cdots(\mu+(i-1)\xi)} \qquad (2.6)$$

Также можно привести расчет таких показателей, как среднее время ожидания начала обслуживания и стационарное среднее время прибывания клиента в системе.

Для начала рассчитаем ФР $W_i(x)$ времени ожидания начала обслуживания клиента, не покидающего обслуживание и заставшего i других клиентов. Первый из этих i клиентов уйдет из системы, обслужившись или же не дождавшись обслуживания, за экспоненциально распределенное время с параметром $\mu+(i-1)\xi$, второй – с параметром $\mu+(i-2)\xi$ и т.д. Тогда ПЛС ФР будет иметь следующий вид:

$$\omega_i(s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}dW_i(x)=\frac{\mu+(i-1)\xi}{s+\mu+(i-1)\xi}\cdot\frac{\mu+(i-2)\xi}{s+\mu+(i-2)\xi}\cdots\frac{\mu}{s+\mu} \qquad (2.7)$$

ФР же общего времени ожидания обслуживания «терпеливым» клиентом определяется как:

$$\omega(s)=\sum_{i=0}^{\infty}\omega_i(s)p_i=\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda}{s+\mu+(i-1)\xi}\cdot\frac{\lambda}{s+\mu+(i-2)\xi}\cdots\frac{\lambda}{s+\mu}\right)p_0 \quad (2.8)$$

Рассчитаем стационарную вероятность того, что клиент будет обслужен. Если клиент не уйдет до момента времени x, не дождавшись обслуживания (вероятность этого равна $e^{-\xi x}$), клиент будет обслужен в какой-либо момент времени на промежутке $(x, x+dx)$ с вероятностью $dW_i(x)$. Используя формулу полной вероятности, получаем выражение для вероятности $P_{s,i}$ того, что клиент, заставший в системе i других клиентов, дождется начала обслуживания.

$$P_{s,i}=\int_0^{\infty}e^{-\xi x}dW_i(x)=\omega_i(\xi)=\frac{\mu+(i-1)\xi}{\xi+\mu+(i-1)\xi}\cdot\frac{\mu+(i-2)\xi}{\xi+\mu+(i-2)\xi}\cdots\frac{\mu}{\xi+\mu}$$
$$=\frac{\mu}{\mu+i\xi} \qquad (2.9)$$

Используя формулу полной вероятности, получаем, что вероятность обслуживания клиента равна:

$$P_s = \sum_{i=0}^{\infty} P_{s,i} p_i = p_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(\mu + \xi) \cdots (\mu + i\xi)}\right) = \frac{\mu}{\lambda}(1 - p_0) \qquad (2.10)$$

А такую важную стационарную характеристику для страховых компаний, как вероятность того, что клиент уйдет из компании, не дождавшись обслуживания P_L, можно получить как:

$$P_L = 1 - P_s = 1 - \frac{\mu}{\lambda}(1 - p_0) \qquad (2.11)$$

Определим стационарное распределение $V(x)$ времени пребывания клиента в системе. Если клиент в какой-либо момент времени на промежутке $(x, x + dx)$ застает i других клиентов ($i \geq 1$), то с вероятностью $\xi e^{-\xi x}(1 - W_i(x))dx$ он может уйти из компании, не дождавшись обслуживания, а с вероятностью же, рассмотренной выше $e^{-\xi x} dW_i(x)$, может дождаться начала обслуживания. Предполагается, что, дождавшись обслуживания и попав на него, клиент точно будет обслужен. Если же клиент дождался обслуживания, то он будет обслуживаться некоторое время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром μ. Причем время пребывания клиента в компании в первом случае будет иметь ПЛС e^{-sx}, а во втором случае – $e^{-sx} \cdot \frac{\mu}{s+\mu}$. Используя формулу полной вероятности, можно получить ПЛС $\varphi_i(s)$ для функции распределения $V_i(x)$ времени пребывания в компании клиента, заставшего в момент поступления i других клиентов.

$$\begin{aligned}
\varphi_i(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dV_i(x) \\
&= \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot \xi \cdot e^{-\xi x} \cdot (1 - W_i(x))dx + \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot e^{-\xi x} \cdot \frac{\mu}{s + \mu} dW_i(x) \\
&= \frac{\xi\big(1 - \omega_i(s + \xi)\big)}{s + \xi} + \frac{\mu}{s + \mu}\omega_i(s + \xi) \\
&= \frac{\xi}{s + \xi} + \frac{(\mu - \xi)s}{(s + \mu)(s + \xi)} \cdot \omega_i(s + \xi), i \geq 1 \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

При $i = 0$ будем иметь: $\varphi_0(s) = \frac{\mu}{\mu+s}$.

Используя формулу полной вероятности, можно получить окончательное выражение для ПЛС $\varphi(s)$ стационарного распределения времени пребывания клиента в системе:

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dV(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(s) p_i = \frac{\xi}{s+\xi} + \frac{(\mu-\xi)s}{(s+\mu)(s+\xi)} \cdot \omega(s+\xi) \qquad (2.13)$$

Тогда стационарные средние времена ожидания клиентом начала обслуживания и пребывания клиента в компании определяются следующим образом:

$$\omega = -\omega'(0) = p_0 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda}{\mu + (i-j)\xi} \cdot \sum_{k=1}^{i} \frac{\lambda}{\mu + (i-k)\xi} \right) \qquad (2.14)$$

$$\varphi = -\varphi'(0) = \frac{1}{\xi} - p_0 \cdot \frac{\mu-\xi}{\mu\xi} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\mu + i\xi} \cdot \frac{\lambda}{\mu + (i-1)\xi} \cdots \frac{\lambda}{\xi + \mu} \right) \qquad (2.15)$$

2.2. Модель $M|M|n|\infty$ с «нетерпеливыми» клиентами

Рассмотрим случай большего, чем 1 числа обслуживающих приборов ($M|M|n|\infty$). Входящий поток имеет пуассоновское распределение с интенсивностью λ, время обслуживания распределено по экспоненциальному закону с параметром μ, система имеет n обслуживающих приборов, а размер очереди неограничен. Максимальное время ожидания заявки в очереди также распределено по экспоненциальному закону с интенсивностью ξ. Систему можно представить следующим образом:

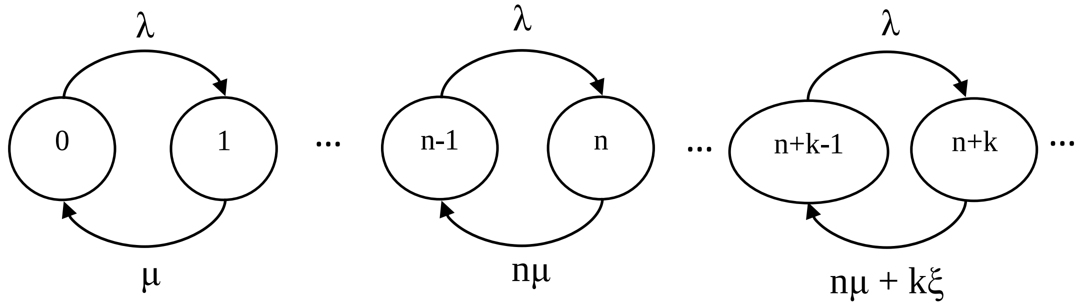

Рисунок 2.2: Система с «нетерпеливыми» клиентами $M|M|n|\infty$.

Дифференциально-разностное уравнение для этой системы имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ \dfrac{dP_i(t)}{dt} = -(\lambda + i\mu)P_i(t) + (i+1)\mu P_{i+1}(t) + \lambda P_{i-1}(t); 1 \le i \le n-1 \\ \dfrac{dP_i(t)}{dt} = -(\lambda + n\mu + (i-n)\xi)P_i(t) + (n\mu + (i+1-n)\xi)P_{i+1}(t) + \lambda P_{i-1}(t); n \le i < \infty \end{cases} \qquad (2.16)$$

В стационарном же состоянии при $t \to \infty$ $\lim_{t\to\infty} P_n(t) = P_n$ и $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$

Таким образом, получаем СУГБ:

$$\begin{cases} 0 = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ 0 = -(\lambda + i\mu)P_i(t) + (i+1)\mu P_{i+1}(t) + \lambda P_{i-1}(t);\ 1 \le i \le n-1 \\ 0 = -(\lambda + n\mu + (i-n)\xi)P_i(t) + (n\mu + (i+1-n)\xi)P_{i+1}(t) + \lambda P_{i-1}(t);\ n \le i < \infty \end{cases} \quad (2.17)$$

СУЛБ для вышеприведенной системы имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ \lambda p_1 = 2\mu p_2 \\ \dots \\ \lambda p_{n-1} = n\mu p_n \\ \lambda p_n = (n\mu + \xi)p_{n+1} \\ \lambda p_{n+1} = (n\mu + 2\xi)p_{n+2} \\ \dots \\ \lambda p_{k-1} = (n\mu + (k-n)\xi)p_k \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = \dfrac{\lambda}{\mu}p_0 \\ p_2 = \dfrac{\lambda}{2\mu}p_1 \\ \dots \\ p_n = \dfrac{\lambda}{n\mu}p_{n-1} \\ p_{n+1} = \dfrac{\lambda}{n\mu + \xi}p_n \\ p_{n+2} = \dfrac{\lambda}{n\mu + 2\xi}p_{n+1} \\ \dots \\ p_k = \dfrac{\lambda}{n\mu + (k-n)\xi}p_{k-1} \\ \dots \end{cases}$$

Подставляя значение p_1 в p_2, p_2 в p_3 …, получаем следующее выражение:

$$p_i = \begin{cases} \dfrac{\lambda^i}{i!\,\mu^i} \cdot p_0, 1 \le i \le n \\ \dfrac{\lambda^i}{n!\,\mu^n} \cdot \dfrac{1}{\prod_{j=n+1}^{i}(n\mu + (j-n)\xi)} p_0, i \ge n+1 \end{cases} \quad (2.18)$$

Используя правило нормировки ($\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$), получаем следующее выражение для вероятности p_0:

$$p_0 = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^i}{i!\,\mu^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{n!\,\mu^n \cdot \prod_{j=n+1}^{i}(n\mu + (j-n)\xi)} \right)^{-1} \quad (2.19)$$

Стационарные характеристики же (среднее число клиентов в системе и средняя длина очереди) представимы следующим образом:

$$N = \sum_{i=0}^{\infty} i p_i = p_0 \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{i \cdot \lambda^i}{i!\,\mu^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{n!\,\mu^n} \cdot \frac{i}{\prod_{j=n+1}^{i}(n\mu + (j-n)\xi)} \right) \quad (2.20)$$

$$Q = \sum_{i=n}^{\infty} (i-n) p_i = p_0 \cdot \left(\sum_{i=n}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!\,\mu^i} \cdot \frac{(i-n)}{\prod_{j=n+1}^{i}(n\mu + (j-n)\xi)} \right) \quad (2.21)$$

Также можно проиллюстрировать расчет стационарного среднего времени ожидания начала обслуживания, а также стационарного среднего времени прибывания клиента в системе.

Рассчитаем ФР $W_i(x)$ времени ожидания начала обслуживания клиента, не покидающего обслуживание и заставшего i других клиентов в очереди. Первый из этих i клиентов уйдет из системы, обслужившись или же не дождавшись обслуживания, за экспоненциально распределенное время с параметром $n\mu + (i-1)\xi$, второй – с параметром $n\mu + (i-2)\xi$ и т.д. Тогда ПЛС ФР будет иметь следующий вид:

$$\omega_i(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dW_i(x) = \frac{n\mu + (i-1)\xi}{s + n\mu + (i-1)\xi} \cdot \frac{n\mu + (i-2)\xi}{s + n\mu + (i-2)\xi} \cdots \frac{n\mu}{s + n\mu} \quad (2.22)$$

Функция распределения же общего времени ожидания «терпеливым» клиентом своего обслуживания определяется как:

$$\omega(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i(s) p_i$$
$$= \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{i \cdot \lambda^i}{i!\, \mu^i} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda}{s + n\mu + (i-1)\xi} \cdot \frac{\lambda}{s + n\mu + (i-2)\xi} \cdots \frac{\lambda}{s + n\mu} \right) p_0 \quad (2.23)$$

Рассчитаем теперь стационарную вероятность того, что клиент будет обслужен. Если клиент не уйдет до момента времени x, не дождавшись обслуживания (вероятность этого равна $e^{-\xi x}$), клиент будет обслужен в какой-либо момент времени на промежутке $(x, x + dx)$ с вероятностью $dW_i(x)$. Используя формулу полной вероятности, получаем выражение для вероятности $P_{s,i}$ того, что клиент, заставший в системе i других клиентов, дождется начала обслуживания.

$$P_{s,i} = \int_0^\infty e^{-\xi x} dW_i(x) = \omega_i(\xi) = \frac{n\mu + (i-1)\xi}{\xi + n\mu + (i-1)\xi} \cdot \frac{n\mu + (i-2)\xi}{\xi + n\mu + (i-2)\xi} \cdots \frac{n\mu}{\xi + n\mu}$$
$$= \frac{n\mu}{n\mu + i\xi} \quad (2.24)$$

Воспользовавшись формулой полной вероятности, получаем вероятность обслуживания клиента:

$$P_s = \sum_{i=0}^{\infty} P_{s,i} p_i = p_0 \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{i \cdot \lambda^i}{i!\, \mu^i} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(n\mu + \xi) \cdots (n\mu + i\xi)} \right) = \frac{n\mu}{\lambda}(1 - \tilde{p}), \quad (2.25)$$

где

$$\tilde{p} = \sum_{i=0}^{n} p_i.$$

Тогда вероятность того, что клиент уйдет из компании, не дождавшись обслуживания P_L, имеет следующий вид:

$$P_L = 1 - P_s = 1 - \frac{n\mu}{\lambda}(1 - \tilde{p}) \tag{2.26}$$

Определим стационарное распределение $V(x)$ времени пребывания клиента в системе. Если клиент в какой-либо момент времени на промежутке $(x, x + dx)$ застает i других клиентов ($i \geq 1$), то с вероятностью $\xi e^{-\xi x}(1 - W_i(x))dx$ он может уйти из компании, не дождавшись обслуживания, а с вероятностью же, рассмотренной выше $e^{-\xi x}dW_i(x)$, может дождаться начала обслуживания. Предполагается, что, дождавшись обслуживания и попав на него, клиент точно будет обслужен. Если же клиент дождался обслуживания, то он будет обслуживаться некоторое время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром μ. Причем время пребывания клиента в компании в первом случае будет иметь ПЛС e^{-sx}, а во втором случае – $e^{-sx} \cdot \frac{n\mu}{s+n\mu}$. Используя формулу полной вероятности, можно получить ПЛС $\varphi_i(s)$ для функции распределения $V_i(x)$ времени пребывания в компании клиента, заставшего в момент поступления i других клиентов.

$$\begin{aligned}
\varphi_i(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dV_i(x) \\
&= \int_0^\infty e^{-sx} \cdot \xi \cdot e^{-\xi x} \cdot (1 - W_i(x))dx + \int_0^\infty e^{-sx} \cdot e^{-\xi x} \cdot \frac{n\mu}{s + n\mu} dW_i(x) \\
&= \frac{\xi\big(1 - \omega_i(s + \xi)\big)}{s + \xi} + \frac{n\mu}{s + n\mu}\omega_i(s + \xi) \\
&= \frac{\xi}{s + \xi} + \frac{(n\mu - \xi)s}{(s + n\mu)(s + \xi)}\omega_i(s + \xi), i \geq 1 \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

А при $i = 0$ будем иметь: $\varphi_0(s) = \frac{n\mu}{n\mu+s}$.

Используя формулу полной вероятности, получаем окончательное выражение для ПЛС $\varphi(s)$ стационарного распределения времени пребывания клиента в системе:

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dV(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(s) p_i = \frac{\xi}{s+\xi} + \frac{(n\mu - \xi)s}{(s+n\mu)(s+\xi)} \omega(s+\xi) \quad (2.28)$$

Тогда стационарные средние времена ожидания клиентом начала обслуживания и пребывания клиента в компании определяются как:

$$\omega = -\omega'(0) = p_0 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda}{n\mu + (i-j)\xi} \cdot \sum_{k=1}^{i} \frac{\lambda}{n\mu + (i-k)\xi} \right) \quad (2.29)$$

$$\varphi(s) = -\varphi'(0) = \frac{1}{\xi} - \frac{n\mu - \xi}{n\mu\xi} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{i \cdot \lambda^i}{i!\, \mu^i} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda}{n\mu + i\xi} \cdot \frac{\lambda}{n\mu + (i-1)\xi} \cdots \frac{\lambda}{\xi + n\mu} \right) \cdot p_0 \quad (2.30)$$

2.3. Модель $M|M|1|N$ с «нетерпеливыми» клиентами

Основное же отличие моделей, иллюстрирующих работу страховых компаний, от вышеприведенной классической модели является то, что количество клиентов в очереди на обслуживание конечно, а клиенты отказываются от обслуживания с определенной вероятностью. Моделью, рассматривающей число клиентов в очереди конечным, является модель, приведенная в работе [9]. Стоит отметить, что авторами были использованы методы работы [15], посвященной изучению системы с «нетерпеливыми» заявками вида $M|M|1|N$.

Входящий в систему поток заявок имеет пуассоновское распределение с интенсивностью λ, время обслуживания, распределенное по экспоненциальному закону с параметром μ. Обслуживающий прибор единственен. Максимально число клиентов очереди равно N. Дисциплина очереди FIFO. Клиент, ожидая некоторое время в очереди, распределенное по экспоненциальному закону с параметром ξ, может покинуть компанию. Особенностью модели является то, что клиенты поступают в систему с вероятностью, пропорциональной числу мест в очереди ($\frac{N-m}{N}$, m – число клиентов, находящихся в очереди в момент прихода данного клиента).

Обозначим в качестве $P_n(t)$ вероятность нахождения в системе n клиентов, $n-1$ из которых находятся в очереди, а один – обслуживается.

Систему можно представить в следующем виде:

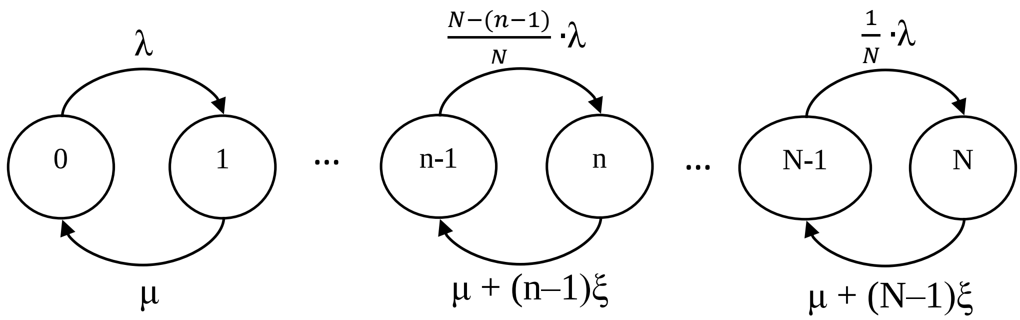

Рисунок 2.3: Система с «нетерпеливыми» клиентами $M|M|1|N$

Дифференциально-разностные уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ \dfrac{dP_n(t)}{dt} = -\left(\dfrac{N-n}{N}\cdot\lambda + \mu + (n-1)\xi\right)P_n + (\mu + n\xi)P_{n+1} + \dfrac{N-(n-1)}{N}\cdot\lambda P_{n-1};\ 1\ \le n \le N-1 \\ \dfrac{dP_N(t)}{dt} = \dfrac{1}{N}\cdot\lambda P_{N-1} - (\mu + (N-1)\xi)P_N;\ n = N \end{cases} \tag{2.31}$$

В стационарном состоянии при $t \to \infty$ $\lim\limits_{t\to\infty} P_n(t) = P_n$ и $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$

Таким образом СУГБ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} 0 = -\lambda P_0 + \mu P_1 \\ 0 = -\left(\dfrac{N-n}{N}\cdot\lambda + \mu + (n-1)\xi\right)P_n + (\mu + n\xi)P_{n+1} + \dfrac{N-(n-1)}{N}\cdot\lambda P_{n-1};\ 1\ \le n \le N-1 \\ 0 = \dfrac{1}{N}\cdot\lambda P_{N-1} - (\mu + (N-1)\xi)P_N;\ n = N \end{cases} \tag{2.32}$$

СУЛБ для вышеприведенной системы можно представить как:

$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1 \\ \lambda P_1 = (\mu + \xi p)P_2 \\ \cdots \\ \lambda P_{n-1} = (\mu + (n-1)\xi p)P_n \\ \cdots \\ \lambda P_{N-1} = (\mu + (N-1)\xi p)P_N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = \dfrac{\lambda}{\mu}P_0 \\ P_2 = \dfrac{\frac{N-1}{N}\cdot\lambda}{\mu+\xi}P_1 \\ \cdots \\ P_n = \dfrac{\frac{N-(n-1)}{N}\cdot\lambda}{\mu+(n-1)\xi}P_{n-1} \\ \cdots \\ P_N = \dfrac{\frac{1}{N}\cdot\lambda}{\mu+(N-1)\xi}P_{N-1} \end{cases}$$

Подставляя значения P_1 в P_2, P_2 в P_3 …, получаем:

$$P_n = P_0 \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{N-(k-1)}{N} \cdot \frac{\lambda}{\mu+(k-1)\xi}; 1 \le n \le N \qquad (2.33)$$

Где P_0, полученная с помощью правила нормировки ($\sum_{n=0}^{N} P_n = 1$), имеет следующий вид:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{N} \prod_{k=1}^{n} \frac{N-(k-1)}{N} \cdot \frac{\lambda}{\mu+(k-1)\xi}} \qquad (2.34)$$

Тогда можно определить среднее число клиентов в компании следующим образом:

$$L_s = \sum_{n=0}^{N} nP_n = \sum_{n=0}^{N} n\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{N-(k-1)}{N} \cdot \frac{\lambda}{\mu+(k-1)\xi}\right)P_0 \qquad (2.35)$$

Среднее же число клиентов в очереди определяется как:

$$L_q = \sum_{n=1}^{N} (n-1)P_n = \sum_{n=1}^{N} (n-1)\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{N-(k-1)}{N} \cdot \frac{\lambda}{\mu+(k-1)\xi}\right)P_0 \qquad (2.36)$$

Для расчета среднего времени ожидания начала обслуживания рассчитаем ФР $W_i(x)$ времени ожидания начала обслуживания клиента, не покидающего обслуживание и заставшего i других клиентов. Первый из этих i клиентов уйдет из системы, обслужившись или же не дождавшись обслуживания, за экспоненциально распределенное время с параметром $\mu + (i-1)\xi$, второй – с параметром $\mu + (i-2)\xi$ и т.д. Тогда ПЛС ФР будет иметь следующий вид:

$$\omega_i(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dW_i(x) = \frac{\mu+(i-1)\xi}{s+\mu+(i-1)\xi} \cdot \frac{\mu+(i-2)\xi}{s+\mu+(i-2)\xi} \cdots \frac{\mu}{s+\mu} \qquad (2.37)$$

ФР же общего времени ожидания обслуживания «терпеливым» клиентом определяется как:

$$\omega(s) = \sum_{i=0}^{N} \omega_i(s) P_i$$

$$= \left(1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda}{s+\mu+(i-1)\xi} \cdot \frac{N-(i-1)}{N} \cdot \frac{\lambda}{s+\mu+(i-2)\xi} \right.$$

$$\left. \cdot \frac{N-(i-2)}{N} \cdots \frac{\lambda}{s+\mu}\right) P_0 \qquad (2.38)$$

Рассчитаем стационарную вероятность того, что клиент будет обслужен. Если клиент не уйдет до момента времени x, не дождавшись обслуживания (вероятность этого равна $e^{-\xi p x}$), клиент будет обслужен в какой-либо момент времени на промежутке $(x, x+dx)$ с вероятностью $dW_i(x)$. Используя формулу полной вероятности, получаем выражение для вероятности $P_{s,i}$ того, что клиент, заставший в системе i других клиентов, дождется начала обслуживания.

$$P_{s,i} = \int_0^\infty e^{-\xi p x} dW_i(x) = \omega_i(\xi) = \frac{\mu + (i-1)\xi}{\xi + \mu + (i-1)\xi} \cdot \frac{\mu + (i-2)\xi}{\xi + \mu + (i-2)\xi} \cdots \frac{\mu}{\xi + \mu}$$
$$= \frac{\mu}{\mu + i\xi} \qquad (2.39)$$

Используя формулу полной вероятности, получаем, что вероятность обслуживания клиента равна:

$$P_s = \sum_{i=0}^{N} P_{s,i} P_i = P_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{N-(i-1)}{N} \cdot \frac{\lambda^i}{(\mu+\xi)\cdots(\mu+i\xi)}\right) = \frac{\mu}{\lambda}(1-P_0) \quad (2.40)$$

А такую важную стационарную характеристику для страховых компаний, как вероятность того, что клиент уйдет из компании, не дождавшись обслуживания P_L, можно получить как:

$$P_L = 1 - P_s = 1 - \frac{\mu}{\lambda}(1-P_0) \qquad (2.41)$$

Определим стационарное распределение $V(x)$ времени пребывания клиента в системе. Если клиент в какой-либо момент времени на промежутке $(x, x+dx)$ застает i других клиентов ($i \geq 1$), то с вероятностью $\xi e^{-\xi x}(1 - W_i(x))dx$ он может уйти из компании, не дождавшись обслуживания, а с вероятностью же, рассмотренной выше $e^{-\xi x} dW_i(x)$, может дождаться начала обслуживания. Предполагается, что, дождавшись обслуживания и попав на него, клиент точно будет обслужен. Если же клиент дождался обслуживания, то он будет обслуживаться некоторое время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром μ. Причем время пребывания клиента в компании в первом случае будет иметь ПЛС e^{-sx}, а во втором случае – $e^{-sx} \cdot \frac{\mu}{s+\mu}$. Используя формулу полной вероятности, можно получить ПЛС $\varphi_i(s)$ для функции распределения $V_i(x)$ времени пребывания в компании клиента, заставшего в момент поступления i других клиентов.

$$\varphi_i(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dV_i(x)$$

$$= \int_0^\infty e^{-sx} \cdot \xi \cdot e^{-\xi x} \cdot (1 - W_i(x))dx + \int_0^\infty e^{-sx} \cdot e^{-\xi x} \cdot \frac{\mu}{s+\mu} dW_i(x)$$

$$= \frac{\xi\big(1 - \omega_i(s+\xi)\big)}{s+\xi} + \frac{\mu}{s+\mu}\omega_i(s+\xi)$$

$$= \frac{\xi}{s+\xi} + \frac{(\mu-\xi)s}{(s+\mu)(s+\xi)} \cdot \omega_i(s+\xi), i \geq 1 \qquad (2.42)$$

При $i = 0$ будем иметь: $\varphi_0(s) = \frac{\mu}{\mu+s}$.

Используя формулу полной вероятности, можно получить окончательное выражение для ПЛС $\varphi(s)$ стационарного распределения времени пребывания клиента в системе:

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dV(x) = \sum_{i=0}^{N} \varphi_i(s) P_i = \frac{\xi}{s+\xi} + \frac{(\mu-\xi)s}{(s+\mu)(s+\xi)} \cdot \omega(s+\xi) \quad (2.43)$$

Тогда стационарные средние времена ожидания клиентом начала обслуживания и пребывания клиента в компании определяются следующим образом:

$$\omega = -\omega'(0) = P_0 \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda \cdot \frac{N-(i-1)}{N}}{\mu + (i-j)\xi} \cdot \sum_{k=1}^{i} \frac{\lambda \cdot \frac{N-(i-1)}{N}}{\mu + (i-k)\xi} \right) \qquad (2.44)$$

$$\varphi(s) = -\varphi'(0) = \frac{1}{\xi} - P_0 \cdot \frac{\mu-\xi}{\mu\xi}$$

$$\cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda}{\mu + i\xi} \cdot \frac{N-(i-1)}{N} \cdot \frac{\lambda}{\mu+(i-1)\xi} \cdot \frac{N-(i-2)}{N} \cdots \frac{\lambda}{\xi+\mu} \right) \qquad (2.45)$$

2.4. Модель $M|M|K|N$ с «нетерпеливыми» клиентами

Но страховые компании не ограничиваются предоставлением лишь одной услуги. Соответственно возникает необходимость в составлении модели, в которой число услуг (обслуживающих приборов) больше, чем единица. Рассмотрим модель вида $M|M|K|N$.

Входящий в систему поток заявок имеет пуассоновское распределение с интенсивностью λ, время обслуживания, распределенное по экспоненциальному закону с параметром μ. Обслуживающий прибор единственен. Максимально число клиентов очереди равно N. Дисциплина очереди FIFO. Клиент, ожидая некоторое время в очереди, распределенное по экспоненциальному закону с параметром ξ, может покинуть компанию. Особенностью модели является то, что клиенты поступают в систему с вероятностью, пропорциональной числу мест в очереди ($\frac{N-m}{N}$, m – число клиентов, находящихся в очереди в момент прихода данного клиента).

Обозначим в качестве $P_n(t)$ вероятность нахождения в системе n клиентов, $n-1$ из которых находятся в очереди, а один – обслуживается.

Системуможно представить в следующем виде:

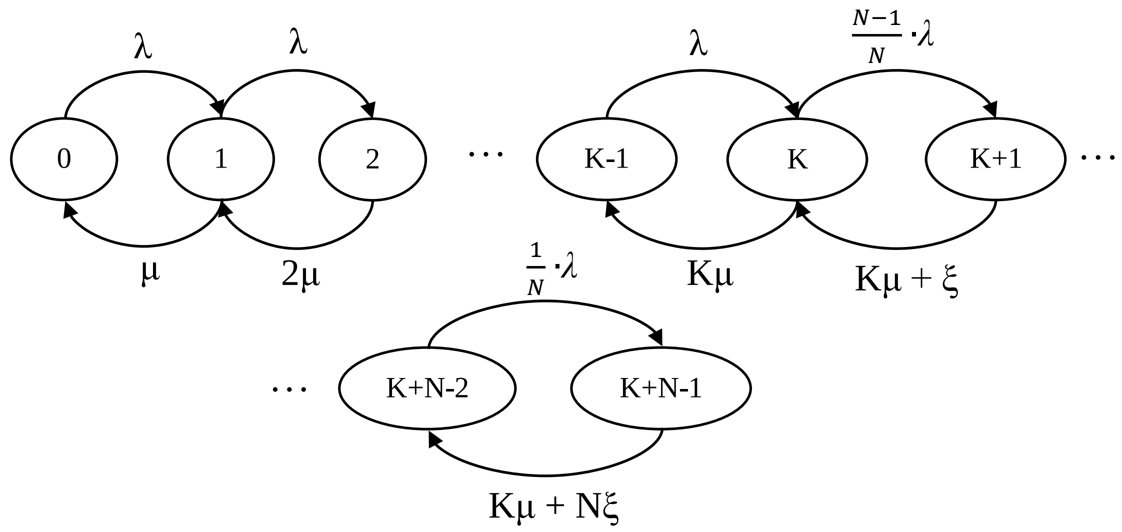

Рисунок 2.4: Система с «нетерпеливыми» клиентами $M|M|K|N$

Дифференциально-разностные уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ \dfrac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda + n\mu)P_n + (n+1)\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1};\ 1 \le n \le K-1 \\ \dfrac{dP_n(t)}{dt} = -\left(\dfrac{N-(n-K)-1}{N}\cdot\lambda + (K\mu + (n-K)\xi)\mu\right)P_n + \\ +(K\mu + (n-K+1)\xi)P_{n+1} + \dfrac{N-(n-K)}{N}\cdot\lambda P_{n-1};\ K \le n \le K+N-2 \\ \dfrac{dP_N(t)}{dt} = \dfrac{1}{N}\cdot\lambda P_{N-1} - (K\mu + N\xi)P_N;\ n = K+N-1 \end{cases} \tag{2.46}$$

В стационарном состоянии при $t \to \infty$ $\lim\limits_{t\to\infty} P_n(t) = P_n$ и $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$

Таким образом СУГБ имеет следующий вид:

$$
\begin{cases}
0 = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\
0 = -(\lambda + n\mu)P_n + (n+1)\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1};\ 1 \le n \le K-1 \\
0 = -\left(\dfrac{N-(i-K)-1}{N}\cdot\lambda + (K\mu + (n-K)\xi)\mu\right)P_n + \\
+(K\mu + (n-K+1)\xi)P_{n+1} + \dfrac{N-(i-K)}{N}\cdot\lambda P_{n-1};\ K \le n \le K+N-2 \\
0 = \dfrac{1}{N}\cdot\lambda P_{N-1} - (K\mu + N\xi)P_N;\ n = K+N-1
\end{cases}
\quad (2.47)
$$

СУЛБ для вышеприведенной системы можно представить как:

$$
\begin{cases}
\lambda P_0 = \mu P_1 \\
\lambda P_1 = 2\mu P_2 \\
\dots \\
\lambda P_{K-1} = K\mu P_K \\
\dfrac{N-1}{N}\cdot\lambda P_K = (K\mu + \xi)P_{K+1} \\
\dfrac{N-2}{N}\cdot\lambda P_{K+1} = (K\mu + 2\xi)P_{K+2} \\
\dots \\
\dfrac{1}{N}\cdot\lambda P_{K+N-2} = (K\mu + N\xi)P_{K+N-1}
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
P_1 = \dfrac{\lambda}{\mu}P_0 \\
P_2 = \dfrac{\lambda}{2\mu}P_1 \\
\dots \\
P_K = \dfrac{\lambda}{K\mu}P_{K-1} \\
P_{K+1} = \dfrac{N-1}{N}\cdot\dfrac{\lambda}{K\mu+\xi}\cdot P_K \\
P_{K+2} = \dfrac{N-2}{N}\cdot\dfrac{\lambda}{K\mu+2\xi}\cdot P_{K+1} \\
\dots \\
P_{K+N-1} = \dfrac{1}{N}\cdot\dfrac{\lambda}{K\mu+(N-1)\xi}\cdot P_{K+N-2}
\end{cases}
$$

Подставляя значения P_1 в P_2, P_2 в P_3 …, получаем:

$$
\begin{cases}
P_n = \dfrac{\lambda^n}{n!\cdot\mu^n}P_0;\ 1 \le n \le K \\
P_n = \dfrac{1}{K!\cdot\mu^K\cdot N^{n-K}}\cdot\dfrac{\lambda^n}{\prod_{i=K+1}^{n}\dfrac{K\mu+(i-K)\xi}{N-(i-K)}}P_0;\ K+1 \le n \le K+N-1
\end{cases}
\quad (2.48)
$$

P_0 можно получить, используя правило нормировки ($\sum_{n=0}^{N} P_n = 1$):

$$
P_0 = \left(\sum_{n=0}^{K}\frac{\lambda^n}{n!\cdot\mu^n} + \sum_{n=K+1}^{K+N-1}\frac{1}{K!\cdot\mu^K\cdot N^{n-K}}\cdot\frac{\lambda^n}{\prod_{i=K+1}^{n}\frac{K\mu+(i-K)\xi}{N-(i-K)}}\right)^{-1} \quad (2.49)
$$

Тогда можно определить среднее число клиентов в компании следующим образом:

$$
L_s = \sum_{n=0}^{K+N-1} nP_n = \left(\sum_{n=1}^{K}\frac{n\lambda^n}{n!\cdot\mu^n} + \sum_{n=K+1}^{K+N-1}\frac{n}{K!\cdot\mu^K\cdot N^{n-K}}\cdot\frac{\lambda^n}{\prod_{i=K+1}^{n}\frac{K\mu+(i-K)\xi}{N-(i-K)}}\right)P_0 \quad (2.50)
$$

Среднее же число клиентов в очереди определяется как:

$$L_q = \sum_{n=K+1}^{K+N-1} (n-K)P_n = P_0 \cdot \sum_{n=K+1}^{K+N-1} \frac{(n-K)}{K! \cdot \mu^K \cdot N^{n-K}} \cdot \frac{\lambda^n}{\prod_{i=K+1}^{n} \frac{K\mu + (i-K)\xi}{N-(i-K)}} \quad (2.51)$$

Для расчета среднего времени ожидания начала обслуживания рассчитаем ФР $W_i(x)$ времени ожидания начала обслуживания клиента, не покидающего обслуживание и заставшего i других клиентов. Первая из этих i заявок уйдет из системы, обслужившись или же не дождавшись обслуживания, за экспоненциально распределенное время с параметром $K\mu + (i-1)\xi$. Тогда ПЛС ФР будет иметь следующий вид:

$$\omega_i(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dW_i(x) = \frac{K\mu + (i-1)\xi}{s + K\mu + (i-1)\xi} \cdot \frac{K\mu + (i-2)\xi}{s + K\mu + (i-2)\xi} \cdots \frac{K\mu}{s + K\mu} \quad (2.52)$$

ФР же общего времени ожидания обслуживания «терпеливым» клиентом определяется как:

$$\omega(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i(s) p_i$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{K} \frac{\lambda^n}{n! \cdot \mu^n} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda}{s + K\mu + (i-1)\xi} \cdot \frac{N-(i-1)}{N} \cdot \frac{\lambda}{s + K\mu + (i-2)\xi} \cdot \frac{N-(i-2)}{N} \cdots \frac{\lambda}{s + K\mu} \right) p_0 \quad (2.53)$$

Рассчитаем стационарную вероятность того, что клиент будет обслужен. Если клиент не уйдет до момента времени x, не дождавшись обслуживания (вероятность этого равна $e^{-\xi x}$), клиент будет обслужен в какой-либо момент времени на промежутке $(x, x+dx)$ с вероятностью $dW_i(x)$. Используя формулу полной вероятности, получаем выражение для вероятности $P_{s,i}$ того, что клиент, заставший в системе i других клиентов, дождется начала обслуживания.

$$P_{s,i} = \int_0^\infty e^{-\xi x} dW_i(x) = \omega_i(\xi) = \frac{K\mu + (i-1)\xi}{\xi + K\mu + (i-1)\xi} \cdot \frac{K\mu + (i-2)\xi}{\xi + K\mu + (i-2)\xi} \cdots \frac{K\mu}{\xi + K\mu}$$

$$= \frac{K\mu}{K\mu + i\xi} \quad (2.54)$$

Используя формулу полной вероятности, получаем, что вероятность обслуживания клиента равна:

$$P_s = \sum_{i=0}^{\infty} P_{s,i} p_i = P_0 \left(\sum_{n=0}^{K} \frac{\lambda^n}{n! \cdot \mu^n} + \sum_{i=1}^{N} \frac{N-(i-1)}{N} \cdot \frac{\lambda^i}{(K\mu+\xi)\cdots(K\mu+i\xi)} \right)$$
$$= \frac{K\mu}{\lambda}(1-\tilde{p}), \qquad (2.55)$$

где

$$\tilde{p} = \sum_{n=0}^{K} \frac{\lambda^n}{n! \cdot \mu^n} P_0$$

Такую стационарную характеристик, как вероятность того, что клиент уйдет из компании, не дождавшись обслуживания P_L, можно получить следующим образом:

$$P_L = 1 - P_s = 1 - \frac{K\mu}{\lambda}(1-\tilde{p}) \qquad (2.56)$$

Определим стационарное распределение $V(x)$ времени пребывания клиента в системе. Если клиент в какой-либо момент времени на промежутке $(x, x+dx)$ застает i других клиентов ($i \geq 1$), то с вероятностью $\xi e^{-\xi x}(1 - W_i(x))dx$ он может уйти из компании, не дождавшись обслуживания, а с вероятностью же, рассмотренной выше $e^{-\xi x} dW_i(x)$, может дождаться начала обслуживания. Предполагается, что, дождавшись обслуживания и попав на него, клиент точно будет обслужен. Если же клиент дождался обслуживания, то он будет обслуживаться некоторое время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром μ. Причем время пребывания клиента в компании в первом случае будет иметь ПЛС e^{-sx}, а во втором случае – $e^{-sx} \cdot \frac{\mu}{s+\mu}$. Используя формулу полной вероятности, можно получить ПЛС $\varphi_i(s)$ для функции распределения $V_i(x)$ времени пребывания в компании клиента, заставшего в момент поступления i других клиентов.

$$\varphi_i(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dV_i(x)$$

$$= \int_0^\infty e^{-sx} \cdot \xi \cdot e^{-\xi x} \cdot (1 - W_i(x))dx + \int_0^\infty e^{-sx} \cdot e^{-\xi x} \cdot \frac{K\mu}{s + K\mu} dW_i(x)$$

$$= \frac{\xi\big(1 - \omega_i(s + \xi)\big)}{s + \xi} + \frac{K\mu}{s + K\mu}\omega_i(s + \xi)$$

$$= \frac{\xi}{s + \xi} + \frac{(K\mu - \xi)s}{(s + K\mu)(s + \xi)} \cdot \omega_i(s + \xi), i \geq 1 \qquad (2.57)$$

При $i = 0$ будем иметь: $\varphi_0(s) = \frac{\mu}{\mu+s}$.

Используя формулу полной вероятности, можно получить окончательное выражение для ПЛС $\varphi(s)$ стационарного распределения времени пребывания клиента в системе:

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dV(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(s) p_i = \frac{\xi}{s + \xi} + \frac{(K\mu - \xi)s}{(s + K\mu)(s + \xi)} \cdot \omega(s + \xi) \quad (2.58)$$

Тогда стационарные средние времена ожидания клиентом начала обслуживания и пребывания клиента в компании определяются следующим образом:

$$\omega = -\omega'(0) = p_0 \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda \cdot \frac{N - (i-1)}{N}}{K\mu + (i - j)\xi} \cdot \sum_{k=1}^{i} \frac{\lambda \cdot \frac{N - (i-1)}{N}}{K\mu + (i - k)\xi} \right) \qquad (2.59)$$

$$\varphi(s) = -\varphi'(0)$$

$$= \frac{1}{\xi} - p_0 \cdot \frac{K\mu - \xi}{K\mu\xi}$$

$$\cdot \left(\sum_{n=0}^{K} \frac{(\frac{N - (n-1)}{N} \cdot \lambda)^n}{n! \cdot \mu^n} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda}{K\mu + i\xi} \cdot \frac{N - (i-1)}{N} \cdot \frac{\lambda}{K\mu + (i-1)\xi} \right.$$

$$\left. \cdot \frac{N - (i-2)}{N} \cdots \frac{\lambda}{\xi + K\mu} \right) \qquad (2.60)$$

3. Программная реализация модели с «нетерпеливыми» клиентами

Ниже представлена аналитические модели систем $M|M|1|N$ и $M|M|K|N$, реализованные с использованием языка программирования Python. Выбор данных моделей обосновывается тем, что размеры очередей в них ограничены. Как следствие, не будет необходимости ограничивать размеры очередей до конченого числа для моделей с бесконечным размером очереди. Выбор же языка Python объясняется его удобством, а также большим количеством пакетов для работы с математическими конструкциями, а также для работы с графиками, в частности с трехмерными графиками.

В данной модели были использованы следующие библиотеки:

pandas – библиотека языка Python для обработки и анализа данных, в основе которой лежит библиотека NumPy. Данная библиотека будет использоваться при построении таблицы, в которой иллюстрируется значения вероятности обслуживания клиента в зависимости от параметров λ и μ. [16]

numpy – библиотека языка Python, в которой представлены функции для обработки многомерных массивов и матриц. Данная библиотека будет использоваться при создании массивов значений параметров λ и μ, а также при конвертировании вектора в матрицу и наоборот. [17]

matplotlib.pyplot – библиотека языка Python, предназначенная для двумерной графики. Модуль pyplot библиотеки matplotlib представляет из себя набор функций для обработки объектов типа Figure. Данная библиотека будет использоваться при создании трехмерных графиков, отражающих зависимость вероятности обслуживания клиента от параметров системы. [18]

math – библиотека языка Python, в которой представлено множество функций для работы с числами. Функция factorial из этой библиотеки понадобиться при создании вышеуказанных моделей. [19]

3.1. Аналитическая модель системы $M|M|1|N$ с «нетерпеливыми» клиентами

В качестве начальных данных берем параметр пуассоновского распределения поступающих в страховую компанию клиентов $\lambda = 0.5$ (интенсивность, с которой клиент приходит в компанию), параметр экспоненциального распределения времени обслуживания клиента $\mu = 0.3$ (интенсивность, с которой клиент обслуживается страховой компанией), параметр экспоненциального распределения времени ожидания клиентом обслуживания $\xi = 0.2$ (интенсивность, с которой клиент уходит из компании, не дождавшись обслуживания), максимальное число мест в очереди $N = 25$.

Для начала с помощью формулы (2.34) определим вероятность, с которой в страховой компании отсутствуют клиенты (рис. 3.1).

```
# Определим P0. Для этого для начала необходимо посчитать сумму вида:
t_sum = 0
for n in range(1, N + 1):
    mult = 1
    for k in range(1, n + 1):
        mult *= ((N - k + 1) / N) * (λ / (μ + (k - 1) * ξ))
    t_sum += mult
# Тогда P0 определяется как:
P.append((1 + t_sum) ** (-1))
P[0]
```

```
0.16371963429918818
```

Рисунок 3.1: Поиск вероятности P_0 модели $M|M|1|N$ с «нетерпеливыми» клиентами

Вероятность отсутствия в компании клиентов равна ~0,16.

Далее с помощью формулы (2.33) рассчитываем распределение оставшихся вероятностей (рис. 3.2).

```
# Доопределим оставшиеся значения вероятностей:
for n in range(1, N + 1):
    mult = 1
    for k in range(1,n + 1):
        mult *= ((N - k + 1)/N) * (λ / (μ + (k - 1) * ξ))
    P.append(mult * P[0])
```

Рисунок 3.2: Поиск оставшихся вероятностей P_n модели $M|M|1|N$ с «нетерпеливыми» клиентами

С помощью формул (2.35) и (2.36) определяем такие стационарные характеристики, как среднее число клиентов в компании, а также среднее число клиентов в очереди (рис. 3.3).

```
# Определим среднее стационарное число клиентов в компании:
Ls = 0
for n in range(N + 1):
    Ls += n * P[n]
print("Среднее стационарное число клиентов в компании:", Ls)
```

```
Среднее стационарное число клиентов в компании: 1.8925998337723586
```

```
# Определим среднее стационарное число клиентов в очереди:
Lq = 0
for n in range(1, N + 1):
    Lq += (n - 1) * P[n]
print("Среднее стационарное число клиентов в очереди:", Lq)
```

```
Среднее стационарное число клиентов в очереди: 1.0563194680715462
```

Рисунок 3.3: Поиск средних стационарных чисел клиентов в компании и клиентов в очереди для модели $M|M|1|N$ с «нетерпеливыми» клиентами

Получаем, что среднее число клиентов в компании, равное ~1.89. превышает среднее число клиентов в очереди, равное, ~1,06, что согласуется с действительностью (число клиентов в компании меньше числа клиентов в очереди).

Помимо средних чисел клиентов в компании и клиентов в очереди, используя формулы (2.44) и (2.45), можно вычислить стационарное среднее время ожидания клиентом начала обслуживания, а также стационарное среднее время пребывания клиента в страховой компании (рис. 3.4).

```python
# Определим стационарное среднее время ожидания клиентом начала обслуживания
t_sum = 0
for i in range(1, N + 1):
    mult = 1
    in_sum = 0
    for j in range(1, i + 1):
        mult *= λ * (N - i + 1)/N / (μ + (i - j) * ξ)
    for k in range(1, i + 1):
        in_sum += λ * (N - i + 1)/N / (μ + (i - k) * ξ)
    t_sum += mult * in_sum
ω = P[0] * t_sum
print("Стационарное среднее время ожидания клиентом начала обслуживания:", ω)
```

```
Стационарное среднее время ожидания клиентом начала обслуживания: 1.8946231363675143
```

```python
# Определим стационарное среднее время пребывания клиента в компании
t_sum = 0
for i in range(1, N + 1):
    mult = 1
    for j in range(1, i + 1):
        mult *= (λ / (ξ + μ + (i - j) * ξ)) * ((N - i + j)/N)
    t_sum += mult
φ = 1/ξ - P[0] * (μ - ξ)/(μ * ξ) * (1 + t_sum)
print("Стационарное среднее время пребывания клиента в компании:", φ)
```

```
Стационарное среднее время пребывания клиента в компании: 4.11671663613131
```

Рисунок 3.4: Поиск стационарных средних времен ожидания клиентом начала обслуживания и пребывания клиентом в компании в модели $M|M|1|N$ с «нетерпеливыми» клиентами

Таким образом, среднее стационарное время ожидания клиентом начала обслуживания равно ~1.89, а среднее стационарное время пребывания клиента в компании равно ~4.12, что также соответствует действительности (среднее время пребывания клиента в компании больше, чем среднее время ожидания в очереди).

Также с помощью формул (2.40) и (2.41) определим такие важные для страховой компании характеристики, как вероятность обслуживания клиента и вероятность, с которой клиент «не вытерпит» и откажется от обслуживания (рис. 3.5).

```python
# Определим вероятность обслуживания клиента, вероятность того,
# что клиент уйдет, не дождавшись обслуживания:
print("Вероятность обслуживания клиента:", μ / λ * (1 - P[0]))
print('Вероятность "нетерпения" клиента:', 1 - μ / λ * (1 - P[0]))
```

```
Вероятность обслуживания клиента: 0.501768219420487
Вероятность "нетерпения" клиента: 0.498231780579513
```

Рисунок 3.5: Вероятности обслуживания и «нетерпения» клиента в модели $M|M|1|N$ с «нетерпеливыми» клиентами

Вероятность того, что клиент не выдержит и откажется от обслуживания относительно высока (~50%). Следовательно компании необходимо предпринять ряд мероприятий, способствующих удержанию клиента (реклама, новые услуги, пересмотр предыдущих тарифов и т.д.).

Рассмотрим зависимость вероятности обслуживания клиента страховой компанией в зависимости от интенсивности входящего потока клиентов λ, а также интенсивности обслуживания клиента μ. Поскольку в формуле (2.40), используемой при вычислении данной характеристики, фигурирует вероятность отсутствия в страховой компании клиентов P_0, то представляется необходимым для каждого значения комбинации (λ, μ) определять свое значение P_0. Итоговый график представлен на рис. 3.6.

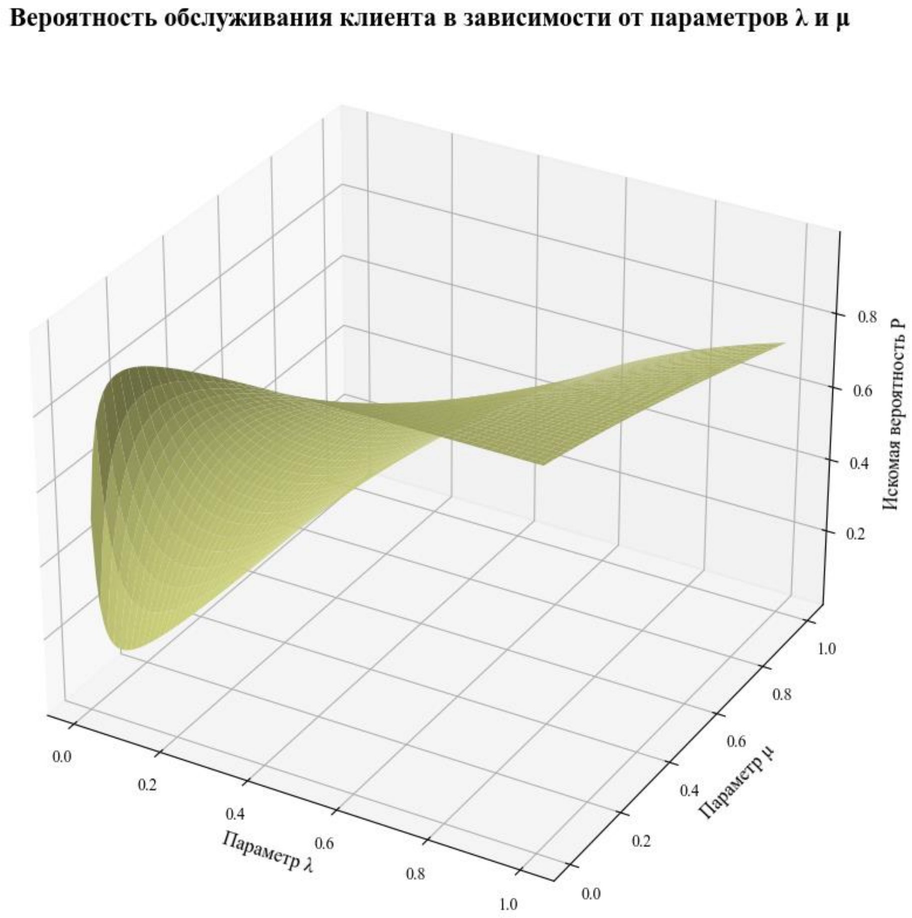

Рисунок 3.6: График зависимости вероятности обслуживания клиента от λ и μ

Из графика видно, что вероятность обслуживания клиента увеличивается при увеличении интенсивности обслуживания μ и уменьшении интенсивности поступления клиентов в компанию λ.

Также данную зависимость можно проиллюстрировать с помощью таб. 3.1. Данные в ней представлены в порядке возрастания искомой вероятности.

	λ	μ	P0	Вероятность обслуживания клиента	Вероятность "нетерпения" клиента
9900	1.00	0.01	0.000139	0.009999	0.990001
9800	0.99	0.01	0.000146	0.010100	0.989900
9700	0.98	0.01	0.000153	0.010203	0.989797
9600	0.97	0.01	0.000161	0.010308	0.989692
9500	0.96	0.01	0.000169	0.010415	0.989585
...	...	...	...	...	...
95	0.01	0.96	0.989606	0.997851	0.002149
96	0.01	0.97	0.989712	0.997888	0.002112
97	0.01	0.98	0.989817	0.997924	0.002076
98	0.01	0.99	0.989920	0.997959	0.002041
99	0.01	1.00	0.990020	0.997993	0.002007

Таблица 3.1. Зависимость вероятности обслуживания клиента от параметров λ и μ

3.2. Аналитическая модель системы M|M|K|N с «нетерпеливыми» клиентами

Начальные данные для модели следующие: параметр пуассоновского распределения поступающих в страховую компанию клиентов $\lambda = 0.5$ (интенсивность, с которой клиент приходит в компанию), параметр экспоненциального распределения времени обслуживания клиента $\mu = 0.3$ (интенсивность, с которой клиент обслуживается страховой компанией), параметр экспоненциального распределения времени ожидания клиентом обслуживания $\xi = 0.2$ (интенсивность, с которой клиент уходит из компании, не дождавшись обслуживания), число услуг, предоставляемой страховой компанией, K = 10, максимальное число мест в очереди $N = 25$.

Сперва с помощью формулы (2.49) рассчитаем вероятность, с которой в страховой компании отсутствуют клиенты (рис. 3.7).

```python
# Найдем p0 - вероятность того, что в компании отсутствуют клиенты
first_sum = 0
second_sum = 0
for n in range(K + 1):
    first_sum += ((λ/μ)** n) / math.factorial(n)
for n in range(K + 1, i_max + 1):
    mult = 1
    for i in range(K + 1, n + 1):
        mult *= (K * μ + (i - K) * ξ)/(N - i + K)
    second_sum += λ ** n / (math.factorial(K) * N ** (n - K) * μ ** K * mult)
P.append((first_sum + second_sum)**(-1)) # вероятность p0
P[0]
```

```
0.18887560696564482
```

Рисунок 3.7: Поиск вероятности P_0 модели $M|M|K|N$ с «нетерпеливыми» клиентами

Вероятность отсутствия в компании клиентов равна ~0,19.

Используя формулы (2.48), вычислим распределение оставшихся вероятностей (рис. 3.8).

```python
# Доопределим оставшиеся значения вероятностей:
for n in range(1, K + 1):
    P.append(P[0] * (λ ** n) / (math.factorial(n) * μ ** n))
for n in range(K + 1, i_max + 1):
    mult = 1
    for i in range(K + 1, n + 1):
        mult *= (K * μ + (i - K) * ξ)/(N - i + K)
    P.append((P[0] * λ ** n) / (math.factorial(K) * μ ** K * N ** (n - K) * mult))
```

Рисунок 3.8: Поиск оставшихся вероятностей P_n модели $M|M|K|N$ с «нетерпеливыми» клиентами

С помощью формул (2.50) и (2.51) определим среднее число клиентов в компании, а также среднее число клиентов в очереди (рис. 3.8).

```python
# Определим среднее стационарное число клиентов в компании:
Ls = 0
for n in range(i_max + 1):
    Ls += n * P[n]
print("Среднее стационарное число клиентов в компании:", Ls)
```

```
Среднее стационарное число клиентов в компании: 1.666666450916296
```

```python
# Определим среднее стационарное число клиентов в очереди:
Lq = 0
for n in range(K + 1, i_max + 1):
    Lq += (n - K) * P[n]
print("Среднее стационарное число клиентов в очереди:", Lq)
```

```
Среднее стационарное число клиентов в очереди: 1.7153904567529064e-06
```

Рисунок 3.8: Поиск средних стационарных чисел клиентов в компании и клиентов в очереди для модели $M|M|K|N$ с «нетерпеливыми» клиентами

Получаем, что среднее число клиентов в компании, равное ~1.67. превышает среднее число клиентов в очереди, равное, ~0,0000017, что согласуется с действительностью (число клиентов в компании меньше числа клиентов в очереди). Также можно отметить, что число клиентов в очереди близко к нулю, что объясняется «нетерпением» клиентов.

Далее с помощью формул (2.59) и (2.60) определим стационарное среднее время ожидания клиентом начала обслуживания, а также стационарное среднее время пребывания клиента в страховой компании (рис. 3.9).

```
# Определим стационарное среднее время ожидания клиентом начала обслуживания
t_sum = 0
for i in range(1, N + 1):
    mult = 1
    in_sum = 0
    for j in range(1, i + 1):
        mult *= λ * (N - i + 1)/N / (n * μ + (i - j) * ξ)
    for k in range(1, i + 1):
        in_sum += λ * (N - i + 1)/N / (n * μ + (i - k) * ξ)
    t_sum += mult * in_sum
ω = P[0] * t_sum
print("Стационарное среднее время ожидания клиентом начала обслуживания:", ω)
```

```
Стационарное среднее время ожидания клиентом начала обслуживания: 0.0004943633030351712
```

```
# Определим стационарное среднее время пребывания клиента в компании
first_sum = 0
second_sum = 0
for n in range(K + 1):
    first_sum += (λ * (N - i + 1) / N) ** n / (math.factorial(n) * (n * μ) ** n)
for i in range(1, N + 1):
    mult = 1
    for j in range(1, i + 1):
        mult *= (λ / (n * ξ + μ + (i - j) * ξ)) * ((N - i + j)/N)
    second_sum += mult
φ = 1/ξ - P[0] * (n * μ - ξ)/(n * μ * ξ) * (first_sum + second_sum)
print("Стационарное среднее время пребывания клиента в компании:", φ)
```

```
Стационарное среднее время пребывания клиента в компании: 3.8235600939005794
```

Рисунок 3.9: Поиск стационарных средних времен ожидания клиентом начала обслуживания и пребывания клиентом в компании в модели $M|M|K|N$ с «нетерпеливыми» клиентами

Среднее стационарное время ожидания клиентом начала обслуживания равно ~0.00049, а среднее стационарное время пребывания клиента в компании равно ~3.82, что также соответствует действительности (среднее время пребывания клиента в компании больше, чем среднее время ожидания в очереди).

С помощью же формул (2.55) и (2.56) определим такие характеристики, как вероятность обслуживания клиента и вероятность, с которой клиент «не вытерпит» и откажется от обслуживания (рис. 3.10).

```
# Определим вероятность обслуживания клиента, вероятность того,
# что клиент уйдет, не дождавшись обслуживания:
p_sum = 0
for n in range(K + 1):
    p_sum += 1/math.factorial(n) * (λ/μ) ** n * P[0]
print("Вероятность обслуживания клиента:", K * μ / λ * (1 - p_sum))
print('Вероятность "нетерпения" клиента:', 1 - K * μ / λ * (1 - p_sum))
```

```
Вероятность обслуживания клиента: 8.939132891239154e-06
Вероятность "нетерпения" клиента: 0.9999910608671088
```

Рисунок 3.10: Вероятности обслуживания и «нетерпения» клиента в модели $M|M|K|N$ с «нетерпеливыми» клиентами

Вероятность того, что клиент не выдержит и откажется от обслуживания очень высока (~100%). Следовательно компании крайне рекомендуется предпринять попытки, удерживающие клиента (реклама, новые услуги, пересмотр предыдущих тарифов и т.д.).

Рассмотрим зависимость вероятности обслуживания клиента страховой компанией в зависимости от интенсивности входящего потока клиентов λ, а также интенсивности обслуживания клиента μ. Поскольку в формуле (2.55), используемой при вычислении данной характеристики, фигурирует вероятность отсутствия в страховой компании клиентов P_0, то представляется необходимым для каждого значения комбинации (λ, μ) определять свое значение P_0. Итоговый график представлен на рис. 3.11.

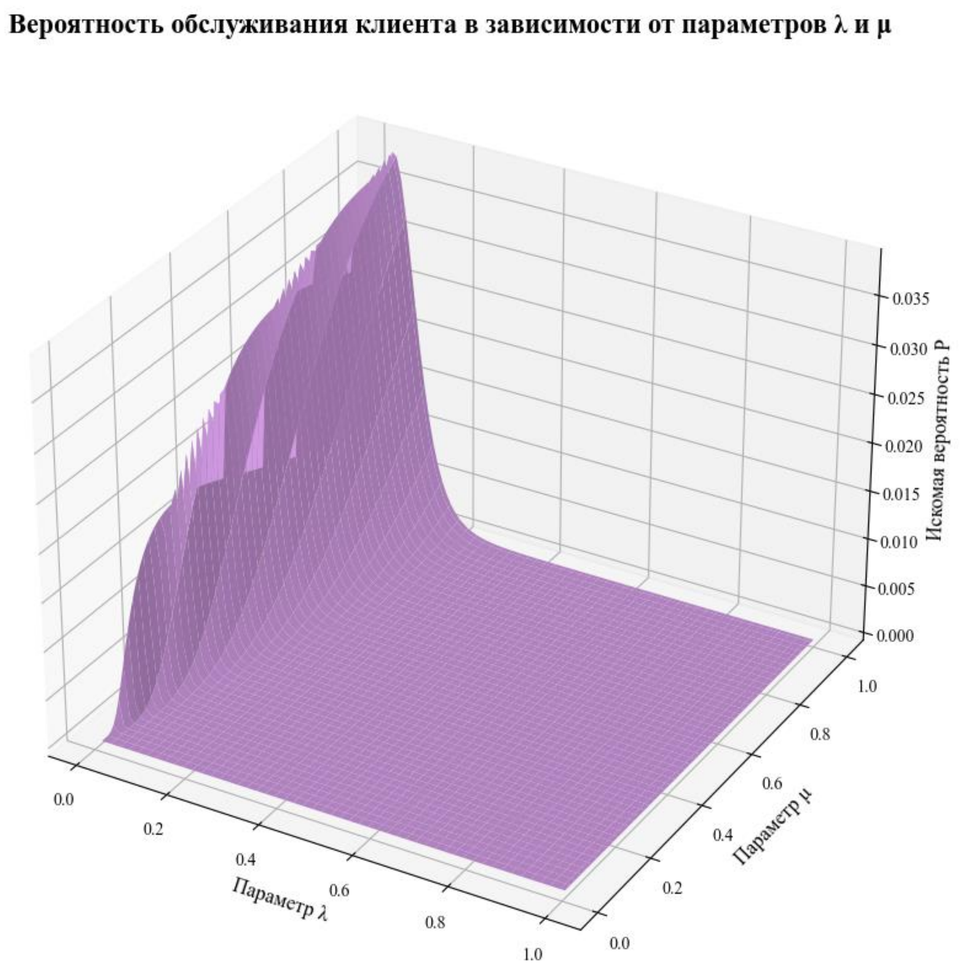

Рисунок 3.11: График зависимости вероятности обслуживания клиента от λ и μ

Из графика видно, что вероятность обслуживания клиента крайне мала и пропорциональна интенсивности обслуживания μ и обратно пропорциональна интенсивности поступления клиентов в компанию λ.

Данную зависимость также можно проиллюстрировать с помощью таб. 3.2. Данные в ней представлены в порядке возрастания искомой вероятности.

	λ	μ	p_sum	Вероятность обслуживания клиента	Вероятность "нетерпения" клиента
4999	0.50	1.00	1.000000	0.000000	1.000000
2251	0.23	0.52	1.000000	0.000000	1.000000
2252	0.23	0.53	1.000000	0.000000	1.000000
2253	0.23	0.54	1.000000	0.000000	1.000000
2254	0.23	0.55	1.000000	0.000000	1.000000
...	...	...	...	...	...
9906	1.00	0.07	0.450305	0.038479	0.961521
9605	0.97	0.06	0.377208	0.038523	0.961477
9705	0.98	0.06	0.368875	0.038640	0.961360
9805	0.99	0.06	0.360690	0.038746	0.961254
9905	1.00	0.06	0.352652	0.038841	0.961159

Таблица 3.2. Зависимость вероятности обслуживания клиента от параметров λ и μ

Заключение

В данной работе были рассмотрены модели ТМО, применяемые при исследовании деятельности страховых компаний.

Были проведены обзор модели, а также их классификация в соответствии с полученными результатами: модели, результатом которых является вероятностное распределение в зависимости от начального страхового капитала; модели, результат которых вероятностное распределение в зависимости от числа клиентов в фирме; имитационная модель числа произошедших, но не заявленных убытков; модели, использующие как элементы ТМО, так и элементы стоимостной теории.

Также более подробно были рассмотрены модели с «нетерпеливыми» клиентами, входящий поток которых – пуассоновский, а обслуживание производится по экспоненциальному закону: одна единственная услуга, оказываемая страховой фирмой, и бесконечное число мест в очереди; больше, чем одна услуга, оказываемая страховой компанией, и бесконечное число мест в очереди; одна единственная услуга, оказываемая страховой компанией, и конечное число мест в очереди; больше, чем одна услуга, оказываемая, страховой фирмой, и конечное число мест в очереди.

Для моделей с одной оказываемой услугой и конечным числом мест в очереди и большей, чем одна оказываемая услуга и конечным числом мест в очереди было с помощью языка программирования Python было реализовано программное обеспечение, демонстрирующее расчет различных вероятностных характеристик, а также функциональной зависимости вероятности обслуживания клиента от интенсивностей входящего потока и обслуживания клиента.

Тезисы, собранные на основе результатов работы, в частности обзора моделей для анализа деятельности страховых компаний, были представлены на VIII Всероссийской конференции «Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems 2022» (Москва, РУДН, 18-22 апреля 2022 года). [20]

Литература

1. *Зорин В. А., Мухин В. И.* Элементы теории процессов риска // Методическая разработка по спецкурсу для студентов дневного отделения факультета ВМК, Нижний Новгород, 2003.
2. *Wen Xu B. S.* The probability of ruin in risk theory // A thesis in statistics, 1993
3. *Iurchenko, M. Y., Yurchenko-Tytarenko, A. Y.* Оценка работы страховой компании при помощи обратного преобразования Лапласа // Науковий Вісник Полісся, 2(6), 2016. 26–30. http://nvp.stu.cn.ua/article/view/77551.
4. *Бурмистрова О.В., Попов Г.А.* Моделирование процесса выплат в страховой компании на основе методов теории массового обслуживания // Вестник Астраханского государственного технического университета, Астрахань, 2010.
5. *Бублик Я.С., Лившиц К.И.* Вероятность разорения страховой компании при дважды стохастических потоках страховых премий и страховых выплат // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика, 2011. № 4(17).
6. *Tao Jiang, Liyan Wen*. Ruin probability in the presence of risky investment by insurance capital // International Conference on Management and Service Science, 2009.
7. *Синякова И., Моисеева С.* Математическая модель страховой компании в виде системы массового обслуживания M|M|∞ // Минск, 2013.
8. *Boucher, J. P., Couture-Piché, G.* Modeling the number of insureds' cars using queuing theory // Insurance: Mathematics and Economics, 2015. 64, 67–76. https://doi.org/10.1016/J.INSMATHECO.2015.04.008
9. *Rakesh Kumar, Bhupender Kumar Som, Sunidhi Jain*. Modeling Insurance Business Facing Customer Impatience using Queuing Theory // American Journal of Operational Research, 2013.
10. *Русилко Т.В.* Прогнозирование дохода страховой компании с использованием сетей массового обслуживания // Прикладная теория вероятностей и теоретическая информатика: сборник тез. докл. Всероссийской конференции, Москва, 17-18 апреля 2012 г. – М. : ИПИ РАН, 2012. – С. 76-78.

11. *Бутов А.А., Галимов Л.А.* Стохастическая имитационная модель оценки резерва произошедших, но не заявленных страховых убытков в терминах СМО // Научный журнал «Фундаментальные исследования», Выпуск журнала №8 (часть 2), 2016.
12. *Muhajir A., Binatari N*. Queueing system analysis of multi server model at XYZ insurance company in Tasikmalaya city // AIP Conference Proceedings, 1868, 2017. https://doi.org/10.1063/1.4995119
13. Центр исследования искусственного интеллекта "ЕЦИПСИИ" [Электронный ресурс]: Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы. Примеры. Разложение Дуба – URL: https://intellect.icu/martingaly-submartingaly-supermartingaly-primery-razlozhenie-duba-2921 (дата обращения: 18.04.2022)
14. *Бочаров П. П., Печинкин А. В.* Теория массового обслуживания // М.: РУДН. –
15. *Kumar R., Sharma S.* M/M/1/N Queuing System with Retention of Reneged Customers // Pakistan Journal of Statistics and Operation Research. 8. 719-735. 10.18187/pjsor.v8i4.408, 2012.
16. Pandas [Электронный ресурс]: pandas documentation – URL: https://pandas.pydata.org/pandas-docs/stable/ (дата обращения: 07.05.2022)
17. NumPy [Электронный ресурс]: NumPy documentation – URL: https://numpy.org/doc/ (дата обращения: 07.05.2022)
18. Matplotlib 3.5.0 documentation [Электронный ресурс]: maplotlib.pyplot – URL: https://matplotlib.org/3.5.0/api/_as_gen/matplotlib.pyplot.html (дата обращения: 07.05.2022)
19. Python [Электронный ресурс]: math – Mathematical functions – URL: https://docs.python.org/3/library/math.html (дата обращения: 07.05.2022)
20. *Иванов Р.В., Зарядов И.С.* Применение методов теории массового обслуживания в страховании и финансовых задачах // Материалы VIII Всероссийской конференции «Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems 2022», Москва, РУДН, 18-22 апреля 2022.

Приложение 1. Программный код для моделей страховых компаний с «нетерпеливыми» клиентами вида $M|M|1|N$ и $M|M|K|N$, реализуемый с помощью языка программирования Python.

```
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math
# Модель M|M|1|N
λ = 0.5 # интенсивность, с которой клиент приходит в компанию
μ = 0.3 # интенсивность, с которой клиент обслуживается компанией
ξ = 0.2 # интенсивность, с которой клиент не дожидается своего обслуживания
N = 25 # максимальное число клиентов в очереди
P = [] # список для распределения вероятностей
# Определим P0. Для этого для начала необходимо посчитать сумму вида:
t_sum = 0
for n in range(1, N + 1):
    mult = 1
    for k in range(1, n + 1):
        mult *= ((N - k + 1) / N) * (λ / (μ + (k - 1) * ξ))
    t_sum += mult
# Тогда P0 определяется как:
P.append((1 + t_sum) ** (-1))
print(P[0])
# Доопределим оставшиеся значения вероятностей:
for n in range(1, N + 1):
    mult = 1
    for k in range(1,n + 1):
        mult *= ((N - k + 1)/N) * (λ / (μ + (k - 1) * ξ))
    P.append(mult * P[0])
# Определим среднее стационарное число клиентов в компании:
Ls = 0
for n in range(N + 1):
```

```
    Ls += n * P[n]
print("Среднее стационарное число клиентов в компании:", Ls)
# Определим среднее стационарное число клиентов в очереди:
Lq = 0
for n in range(1, N + 1):
    Lq += (n - 1) * P[n]
print("Среднее стационарное число клиентов в очереди:", Lq)
# Определим стационарное среднее время ожидания клиентом начала обслуживания
t_sum = 0
for i in range(1, N + 1):
    mult = 1
    in_sum = 0
    for j in range(1, i + 1):
        mult *= λ * (N - i + 1)/N / (μ + (i - j) * ξ)
    for k in range(1, i + 1):
        in_sum += λ * (N - i + 1)/N / (μ + (i - k) * ξ)
    t_sum += mult * in_sum
ω = P[0] * t_sum
print("Стационарное среднее время ожидания клиентом начала обслуживания:", ω)
# Определим стационарное среднее время пребывания клиента в компании
t_sum = 0
for i in range(1, N + 1):
    mult = 1
    for j in range(1, i + 1):
        mult *= (λ / (ξ + μ + (i - j) * ξ)) * ((N - i + j)/N)
    t_sum += mult
ϕ = 1/ξ - P[0] * (μ - ξ)/(μ * ξ) * (1 + t_sum)
print("Стационарное среднее время пребывания клиента в компании:", ϕ)
# Определим вероятность обслуживания клиента, вероятность того,
# что клиент уйдет, не дождавшись обслуживания:
print("Вероятность обслуживания клиента:", μ / λ * (1 - P[0]))
print('Вероятность "нетерпения" клиента:', 1 - μ / λ * (1 - P[0]))
def P0_search(combo):
    # Функция определяет вероятность, с которой в компании отсутсвуют клиенты
    # На вход поступает список из λ и μ
```

```
    λ, μ = combo[0], combo[1]
    t_sum = 0
    ξ = 0.2
    N = 25
    for n in range(1, N + 1):
        mult = 1
        for k in range(1, n + 1):
            mult *= ((N - k + 1) / N) * (λ / (μ + (k - 1) * ξ))
        t_sum += mult
    return (1 + t_sum) ** (-1)
%matplotlib notebook
ax = plt.subplots(1, 1, figsize=(11,10))
ax = plt.axes(projection = '3d')

λ = np.linspace(0.01, 1, 100) # определяем список из различных значений параметраа λ
μ = np.linspace(0.01, 1, 100) # определяем список из различных значений параметраа μ

df1 = pd.DataFrame({"λ" : λ})
df2 = pd.DataFrame({"μ" : μ})
df = df1.merge(df2, how = "cross") # создает таблицу из комбинаций параметров λ и μ
df["tmp"] = df.values.tolist() # создаем временную колонку со спискм из параметров λ и μ
df["P0"] = df.tmp.apply(P0_search) # используем вышесозданную функцию
df = df.drop("tmp", axis = 1) # удаляем временную колонку

P0_vector = df.P0.values.tolist() # берем колонку с вероятностями P0
P0 = np.reshape(P0_vector, (len(λ), len(λ))) # и конвертируем ее в матрицу

X, Y = np.meshgrid(μ, λ)
Z = X / Y * (1 - P0) # определяем искомую вероятность в зависимости от параметров λ, μ и P0

# "Вероятность обслуживания клиента в зависимости от параметров λ и μ"
plt.title('Вероятность обслуживания клиента в зависимости от параметров λ и μ', fontweight='bold', size=16,
          fontname = "Times New Roman")
ax.set_xlabel('Параметр λ', fontname = "Times New Roman", fontsize = 12)
```

```
ax.set_ylabel('Параметр μ', fontname = "Times New Roman", fontsize = 12)
ax.set_zlabel('Искомая вероятность P', fontname = "Times New Roman", fontsize = 12)
for tick in ax.get_xticklabels():
    tick.set_fontname("Times New Roman")
for tick in ax.get_yticklabels():
    tick.set_fontname("Times New Roman")
for tick in ax.get_zticklabels():
    tick.set_fontname("Times New Roman")
ax.plot_surface(X, Y, Z, color = '#e3e889')
plt.show()
df["Вероятность обслуживания клиента"] = Z.flatten()
df['Вероятность "нетерпения" клиента'] = 1 - df["Вероятность обслуживания клиента"]
df.sort_values("Вероятность обслуживания клиента", ascending = True)
# -----------------------------------------------------------------------------------------------------
# Модель M|M|K|N
λ = 0.5 # интенсивность, с которой клиент приходит в компанию
μ = 0.3 # интенсивность, с которой клиент обслуживается компанией
ξ = 0.2 # интенсивность, с которой клиент не дожидается своего обслуживания
K = 10 # число услуг, предоставляемых компанией
N = 25 # максимальное число клиентов в очереди
i_max = N + K - 1  # максимальное число состояний (клиентов) в компании
P = [] # список для распределения вероятностей
# Найдем p0 - вероятность того, что в компании отсутствуют клиенты
first_sum = 0
second_sum = 0
for n in range(K + 1):
    first_sum += ((λ/μ)** n) / math.factorial(n)
for n in range(K + 1, i_max + 1):
    mult = 1
    for i in range(K + 1, n + 1):
        mult *= (K * μ + (i - K) * ξ)/(N - i + K)
    second_sum += λ ** n / (math.factorial(K) * N ** (n - K) * μ ** K * mult)
P.append((first_sum + second_sum)**(-1)) # вероятность p0
print(P[0])
# Доопределим оставшиеся значения вероятностей:
```

```
for n in range(1, K + 1):
    P.append(P[0] * (λ ** n) / (math.factorial(n) * μ ** n))
for n in range(K + 1, i_max + 1):
    mult = 1
    for i in range(K + 1, n + 1):
        mult *= (K * μ + (i - K) * ξ)/(N - i + K)
    P.append((P[0] * λ ** n) / (math.factorial(K) * μ ** K * N ** (n - K) * mult))
# Определим среднее стационарное число клиентов в компании:
Ls = 0
for n in range(i_max + 1):
    Ls += n * P[n]
print("Среднее стационарное число клиентов в компании:", Ls)
# Определим среднее стационарное число клиентов в очереди:
Lq = 0
for n in range(K + 1, i_max + 1):
    Lq += (n - K) * P[n]
print("Среднее стационарное число клиентов в очереди:", Lq)
# Определим стационарное среднее время ожидания клиентом начала обслуживания
t_sum = 0
for i in range(1, N + 1):
    mult = 1
    in_sum = 0
    for j in range(1, i + 1):
        mult *= λ * (N - i + 1)/N / (n * μ + (i - j) * ξ)
    for k in range(1, i + 1):
        in_sum += λ * (N - i + 1)/N / (n * μ + (i - k) * ξ)
    t_sum += mult * in_sum
ω = P[0] * t_sum
print("Стационарное среднее время ожидания клиентом начала обслуживания:", ω)
# Определим стационарное среднее время пребывания клиента в компании
first_sum = 0
second_sum = 0
for n in range(K + 1):
    first_sum += (λ * (N - i + 1) / N) ** n / (math.factorial(n) * (n * μ) ** n)
for i in range(1, N + 1):
```

```
    mult = 1
    for j in range(1, i + 1):
        mult *= (λ / (n * ξ + μ + (i - j) * ξ)) * ((N - i + j)/N)
    second_sum += mult
ϕ = 1/ξ - P[0] * (n * μ - ξ)/(n * μ * ξ) * (first_sum + second_sum)
print("Стационарное среднее время пребывания клиента в компании:", ϕ)
# Определим вероятность обслуживания клиента, вероятность того,
# что клиент уйдет, не дождавшись обслуживания:
p_sum = 0
for n in range(K + 1):
    p_sum += 1/math.factorial(n) * (λ/μ) ** n * P[0]
print("Вероятность обслуживания клиента:", K * μ / λ * (1 - p_sum))
print('Вероятность "нетерпения" клиента:', 1 - K * μ / λ * (1 - p_sum))
def P_search(combo):
    # Функция определяет вероятность, с которой в компании отсутсвуют клиенты
    # На вход поступает список из λ и μ
    λ, μ = combo[0], combo[1]
    t_sum = 0
    ξ = 0.2
    N = 25
    K = 10
    i_max = N + K - 1
    first_sum = 0
    second_sum = 0
    for n in range(K + 1):
        first_sum += ((λ/μ)** n) / math.factorial(n)
    for n in range(K + 1, i_max + 1):
        mult = 1
        for i in range(K + 1, n + 1):
            mult *= (K * μ + (i - K) * ξ)/(N - i + K)
        second_sum += λ ** n / (math.factorial(K) * N ** (n - K) * μ ** K * mult)
    P0 = (first_sum + second_sum)**(-1)
    p_sum = 0
    for n in range(K + 1):
        p_sum += 1/math.factorial(n) * (λ/μ) ** n * P0
```

```
    return p_sum
%matplotlib notebook
ax = plt.subplots(1, 1, figsize=(11,10))
ax = plt.axes(projection = '3d')
λ = np.linspace(0.01, 1, 100) # определяем список из различных значений параметраа λ
μ = np.linspace(0.01, 1, 100) # определяем список из различных значений параметраа μ
df1 = pd.DataFrame({"λ" : λ})
df2 = pd.DataFrame({"μ" : μ})
df = df1.merge(df2, how = "cross") # создает таблицу из комбинаций параметров λ и μ
df["tmp"] = df.values.tolist() # создаем временную колонку со спискм из параметров λ и μ
df["p_sum"] = df.tmp.apply(P_search) # используем вышесозданную функцию
df = df.drop("tmp", axis = 1) # удаляем временную колонку
P_sum_vector = df.p_sum.values.tolist() # берем колонку с вероятностями P0
P_sum = np.reshape(P_sum_vector, (len(λ), len(λ))) # и конвертируем ее в матрицу
X, Y = np.meshgrid(μ, λ)
Z = X / Y * (1 - P_sum) # определяем искомую вероятность в зависимости от параметров λ, μ и P0
# "Вероятность обслуживания клиента в зависимости от параметров λ и μ"
plt.title('Вероятность обслуживания клиента в зависимости от параметров λ и μ', fontweight='bold', size=16,
          fontname = "Times New Roman")
ax.set_xlabel('Параметр λ', fontname = "Times New Roman", fontsize = 12)
ax.set_ylabel('Параметр μ', fontname = "Times New Roman", fontsize = 12)
ax.set_zlabel('Искомая вероятность P', fontname = "Times New Roman", fontsize = 12)
for tick in ax.get_xticklabels():
    tick.set_fontname("Times New Roman")
for tick in ax.get_yticklabels():
    tick.set_fontname("Times New Roman")
for tick in ax.get_zticklabels():
    tick.set_fontname("Times New Roman")
ax.plot_surface(X, Y, Z, color = '#e6aafa')
plt.show()
df["Вероятность обслуживания клиента"] = (Z.flatten()).round(10)
df['Вероятность "нетерпения" клиента'] = 1 - df["Вероятность обслуживания клиента"]
df.sort_values("Вероятность обслуживания клиента", ascending = True)
```